NOM : CAPOSTOLET.................... Prénom : Arsène.................... Groupe : 109

IUT Paris Descartes – Dép. Informatique – Algèbre Linéaire S1 –
DST du 6 Novembre 2017

Sans calculatrice, sans portable, sans document – Durée : 2h.
Le barème est approximatif.

$\frac{0,5}{10}$

Exercice 1 (10 points)

On considère les matrices et les résultats suivants:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} t & 4 \\ 1 & t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad G \text{ est inversible.}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ (avec } x, y, z \text{ des réels)}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que $M(n,p)$ est l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.

Dans cet exercice, vous répondrez directement sur le sujet. Pour chaque question, une ou plusieurs réponse(s) sont possibles. (excepté les Vrai/Faux)
Très peu de calculs sont nécessaires pour répondre aux questions.
Une réponse juste rapporte 0.5 points, une réponse fausse enlève 0.25 points.

1. Répondez par vrai ou faux:

$-\frac{0,5}{4}$

	Vrai	Faux	
$CE \in M(2,3)$	☒	☒	-0,25
EF est un produit compatible	☒	☐	0,5
$FG \in M(1,3)$	☒	☒	-0,25
${}^tF \in M(3,1)$	☒	☒	-0,25
$({}^tE)G \in M(1,3)$	☒	☒	-0,25
$(B+D)C \in M(2,2)$	☐	☒	0,5
$C(A+G) \in M(2,3)$	☒	☒	-0,25
C est inversible	☒	☒	-0,25

2. L'inverse de B:

$-\frac{0,25}{0,5}$

☐ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ ☒ est $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 0 ☒ n'existe pas -0,25 ☐ aucune réponse correcte

−0,25 / 0,5

3. D est inversible si et seulement si:

☐ $t = 0$ ☒ $t \neq 0$ −0,25 ☐ $t^2 - 4 = 0$ ☐ $t^2 + 4 = 0$ ☐ $t^2 + 4 \neq 0$ ☒ $t^2 - 4 \neq 0$ 0

−0,25 / 0,5

4. $A^2 =$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 0 ☒ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ −0,25 ☐ aucune réponse correcte

5. $GA + 2A =$

−0,25 / 0,5

☒ $(G+2)A$ −0,25 ☐ $A(G+2)$ ☒ $(G+2I_3)A$ 0 ☐ $A(G+2I_3)$

6. L'unique solution du système $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 2 \\ x + z = 0 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$ est le triplet X donné par la formule:

0,5 / 0,5

☐ GX ☐ $G^{-1}X$ ☐ GE ☒ $G^{-1}E$ 0,5 ☐ GF ☐ $G^{-1}F$

7. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont **non inversibles**:

1,5 / 1,5

☐ $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ 0,5 ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ 0,5 ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

8. Répondez par vrai ou faux:

0 / 2

	Vrai	Faux	
Si deux matrices A et B sont telles que $AB = -BA$, alors $(A+B)^2 = A^2 + B^2$	☒	☐	0
Une matrice inversible ne contient aucun coefficient nul.	☐	☒	0,5
Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants s'ils sont non-colinéaires deux à deux.	☒	☒	−0,25
L'ensemble des solutions d'un système linéaire $AX = B$, avec B non nul, est un sous-espace vectoriel.	☒	☒	−0,25

Exercice 2 (∼ 4 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Déterminer à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, si elle existe, la matrice A^{-1} inverse de A.

2. On considère le système linéaire à trois inconnues suivant: $(S): \begin{cases} x + 2y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ y + 4z = 3 \end{cases}$

   (a) Ecrire le système sous forme matricielle $MX = P$ avec M, X et P des matrices que l'on précisera.

   (b) En déduire les solutions du système (S).

Exercice 3 ($\sim$ 6 points)

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant: $(S) : \begin{cases} x+y=16 \\ x+y+4z=60 \end{cases}$

   (b) Donner l'ensemble E des solutions sous la forme $E = \{a\vec{u}+\vec{v}, a \in \mathbb{R}\}$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera.

   (c) Donner deux exemples de solutions du système (S).

   (d) E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Justifier.

   (e) Déduire des questions précédentes l'ensemble E_1 des solutions du système (S_1) : $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=8 \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{6}y+\frac{2}{3}z=10 \end{cases}$

2. On rappelle qu'une moyenne M de trois valeurs x, y, et z pondérée par des coefficients a_1, a_2 et a_3 est donnée par la formule: $M = \frac{a_1x+a_2y+a_2z}{a_1+a_2+a_3}$
C'est à dire
$$M = \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}x + \frac{a_2}{a_1+a_2+a_3}y\frac{a_3}{a_1+a_2+a_3}z$$

   Exemple: Une moyenne M de trois notes $(12; 10; 8)$ affectées respectivement des coefficients $(1; 2; 1.5)$ se calcule comme suit:
$$M = \frac{1}{4.5} \times 12 + \frac{2}{4.5} \times 10 + \frac{1.5}{4.5} \times 8$$

   On suppose que qu'un étudiant de Licence obtient en mathématiques deux notes de contrôle continu, notées CC_1 et CC_2 et une note d'examen final notée $Exam$. On désire calculer d'une part:

   - la **moyenne des contrôles continus** notée M_{CC} (chaque contrôle ayant le même coefficient)
   - la **moyenne générale** notée M_g comme la moyenne pondérée de $(CC_1; CC_2; Exam)$ avec les coefficients $(1; 1; 4)$.

   (a) Proposer une matrice A telle que : $A \times \begin{pmatrix} CC_1 \\ CC_2 \\ Exam \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{CC} \\ M_g \end{pmatrix}$

   (b) En utilisant le calcul matriciel précédent, donner la moyenne de contrôle continu et la moyenne générale d'un étudiant ayant obtenu 15 et 13 aux contrôles continus, et 8 à l'examen.

   (c) Est-il possible d'obtenir 8 en moyenne de contrôle continu et 10 en moyenne générale? Si oui, avec quelles notes de contrôles continus et d'examen, et sinon, pour quelle(s) raison(s)?