

NOM : RIFKI Prénom : Kenza Groupe : MO

IUT Paris Descartes – Dép. Informatique – Algèbre Linéaire S1 –
DST du 20 Janvier 2017

*Sans calculatrice, sans portable, sans document – Durée : 2h.
Le barème est approximatif.*

Exercice 1 (40% de la note totale)

Dans \mathbb{R}^3 , $E = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique. On considère les matrices et résultats suivants:

• $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; V désigne la famille $V = (v_1, v_2, v_3)$.

• $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

• On admet que P et Q sont inverses l'une de l'autre.

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & -2 \\ 12 & 12 & 5 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• On admet que $A = P \times D \times Q$.

On rappelle que:

- $M(n, p)$ est l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes
- La spectre d'une matrice A , noté $\text{Spec}(A)$, est l'ensemble de ses valeurs propres
- Pour une matrice A donnée, $E(\lambda)$ désigne l'espace propre associé à la valeur propre λ de A

Dans cet exercice, vous répondrez directement sur le sujet. Pour chaque question, une ou plusieurs réponse(s) sont possibles. Une réponse juste rapporte les points correspondants, une réponse fausse enlève la moitié des points.

Indications: Lisez bien les informations de l'énoncé, très peu de calculs sont nécessaires pour répondre aux questions.

1. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- V est une base de \mathbb{R}^3 V n'est pas une base de \mathbb{R}^3
- $\text{Coord}_E(V) = Q$ $\text{Coord}_E(V) = P$ $\text{Coord}_V(E) = P$ $\text{Coord}_V(E) = Q$

2. $\text{Coord}_V(e_2) =$

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. On note f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique E est A .

(a) On peut considérer que $D = \text{Mat}_B(f)$ avec

- $B = (v_1, v_2, v_3)$ $B = (v_1, v_3, v_2)$ $B = (v_2, v_1, v_3)$ $B = (v_3, v_2, v_1)$

(b) Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- $f(e_1) = -e_1 + e_2$ $f(v_1) = v_1$
- $f(e_1) = -e_1 + 3e_2 - 2e_3$ $f(v_1) = -e_1 + e_2$
- $f(e_1) = e_1 - 6e_2 + 12e_3$ $f(v_1) = -v_1 + 3e_2 + 2e_3$
- $f(e_1) = e_1$ $f(v_1) = v_1 - 6v_2 + 12v_3$

(c) Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- e_1 est vecteur propre de A
- v_3 est vecteur propre de A associé à -1
- v_2 est vecteur propre de A associé à -1
- $\dim(E(1)) = 1$
- $\dim(E(1)) = 2$
- $v_1 + v_3$ est vecteur propre de A associé à 1
- $v_1 + v_2$ est vecteur propre de A associé à 1

(d) Parmi les produits matriciels suivants, indiquez ceux qui constituent une diagonalisation de A :

- $P_1 D_1 P_1^{-1}$ où $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- $P_2 D_2 P_2^{-1}$ où $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $P_3 D_3 P_3^{-1}$ où $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $P_4 D_4 P_4^{-1}$ où $P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(e) Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

f est une symétrie

f est une projection

f est une symétrie par rapport à l'espace $E(1)$, parallèlement à l'espace $E(-1)$

f est une symétrie par rapport à l'espace $E(-1)$, parallèlement à l'espace $E(1)$

f est une projection sur l'espace $E(1)$, parallèlement à l'espace $E(-1)$

f est une projection sur l'espace $E(-1)$, parallèlement à l'espace $E(1)$

Exercice 2 (25% de la note totale)

Pour chaque matrice du tableau suivant, déterminer en justifiant, si la matrice est diagonalisable ou non, ou s'il manque des informations pour pouvoir répondre. (Précisez alors les informations nécessaires)

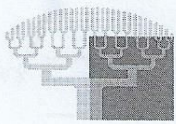
Matrice	Spectre	Info. supplémentaires
$A \in M(3, 3)$	$\{0, 3\}$	$\dim(E(0)) = 2$ et $\dim(E(3)) = 1$
$B \in M(4, 4)$	$\{0, 3\}$	$\dim(E(0)) = 1$
$C \in M(2, 2)$	$\{4\}$	
$D \in M(5, 5)$	$\{2, 1, 3\}$	$\dim(E(1)) = 3$
$E \in M(4, 4)$	$\{0, 3\}$	$\dim(E(0)) = 2$ et $\dim(E(3)) = 1$

Exercice 3 (35% de la note totale)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 16 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & -16 & 5 \end{pmatrix}$.

On admet que 5 et -3 sont des valeurs propres de A .

1. Proposer une base et donner la dimension de chaque sous-espace propre de A .
2. Proposer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. (On ne demande pas le calcul de P^{-1}).
3. En déduire une expression de A^n en fonction de P et D .



DISCIPLINE : Algèbre linéaire

Date de l'épreuve : 20/01/2017

Année : 1^{ère} Groupe : MD

Écrire très lisiblement

NOM : RIEKI
(en capitales)

Prénom : KENZA

NOTE DE 0 À 20

APPRÉCIATIONS

19/20

Bonne!

Ne rien écrire dans
cette marge

Exercice 2 :

• La matrice A est diagonalisable car c'est une matrice de taille 3 et la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à 3.

$$\dim[E(0)] + \dim[E(3)] = 2 + 1 = 3.$$

• ~~Non diagonalisable~~ On ne peut pas savoir si la matrice B est diagonalisable car il nous manque des informations. En effet, son spectre est composé de 2 valeurs, mais nous n'avons la dimension que d'un seul sous-espace.

$$B \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \dim(E(0)) + \dim(E(3)) = 4$$

$$\Leftrightarrow 1 + \dim(E(3)) = 4$$

$$\Leftrightarrow \dim(E(3)) = 3.$$

Il ^{nous} faudrait donc la dimension du sous-espace $E(3)$ pour savoir si elle est diagonalisable.

- De la même façon, il n'y a pas assez d'informations sur la matrice C pour savoir si elle est diagonalisable.

Il faudrait avoir la dimension de son sous-espace $E(4)$. ~~Si elle est égale à 2, alors C sera diagonalisable (car C est une matrice de taille 2)~~
 Si elle est égale à 2, alors C sera diagonalisable (car C est une matrice de taille 2)

- la matrice D de taille 5 est diagonalisable. En effet, même si l'on ne connaît la dimension que d'un seul de ses sous-espaces propres, on peut déjà connaître celle des deux autres. $\dim(E(1)) = 3$, or la dimension d'un sous-espace propre est au minimum égale à 1

$$\text{donc } \dim[E(1)] + \dim[E(2)] + \dim[E(3)] = 5$$

$$\Leftrightarrow 3 + \dim[E(2)] + \dim[E(3)] = 5$$

$$\Leftrightarrow \dim[E(2)] + \dim[E(3)] = 2$$

$$\Leftrightarrow \dim[E(2)] = 1 \text{ et } \dim[E(3)] = 1$$

~~comme la dimension~~ ce qui confirme donc que la matrice D est diagonalisable.

- $\dim(E(2)) + \dim(E(3)) = 2 + 1 = 3$.

~~La~~ La somme de tous les sous-espaces propres de E est égale à 3. Or E est une matrice de taille 4.

Donc E n'est pas diagonalisable.

EXERCICE 3 :

1. $\text{Spec}(A) = \{5, -3\}$

• $E(5) = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = 5X\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(5) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 16y = 5x \\ 5y = 5y \\ 8x - 16y + 5z = 5z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 16y = 0 \\ 0 = 0 \\ 8x - 16y = 0 \end{cases} \quad \text{or } -8x + 16y = -1(8x - 16y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 16y = 0 \\ y = a, a \in \mathbb{R} \\ z = b, b \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 16a \\ y = a, a \in \mathbb{R} \\ z = b, b \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ y = a, a \in \mathbb{R} \\ z = b, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(5) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

2. D'où $B = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

est une base de $E(5)$ et $\dim(E(5)) = 2$. ✓

• $E(-3) = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = -3X\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(-3) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 16y = -3x \\ 5y = -3y \\ 8x - 16y + 5z = -3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16y = 0 \\ 8y = 0 \\ 8x - 16y + 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 16y + 8z = 0 \\ y = 0 \\ z = a, a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = -8z \\ y = 0 \\ z = a, a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a, a \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = a, a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(-3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $B' = (b'_i)$ avec $b'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $E(-3)$,

et $\dim(E(-3)) = 1$.

2. ①' après la question précédente, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A .

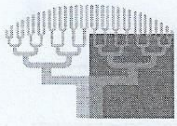
$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est associé à la valeur propre -3 ,

et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont associés à la valeur propre 5 .

La matrice composée des ^{ces} vecteurs propres est inversible car ils sont linéairement indépendants. En effet, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas liés car les 0 qui les composent font qu'ils ne sont pas combinaison linéaire l'un de l'autre, et ces deux vecteurs ne peuvent pas être écrits en $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ car tous les trois sont des vecteurs propres de A et la valeur propre de $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est différente de celle de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. ①' où $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc ~~_____~~

$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, car



UNIVERSITÉ
PARIS DESCARTES

IUT

DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

DISCIPLINE : ... Algèbre Linéaire ...

Date de l'épreuve : ... 20/01/2017 ...

Année : ... 1^{ère} ... Groupe : ... MD ...

NOM : ... RIEKI ...
Prénom : ... Kenza ...
(en capitales)

Ecrire très lisiblement

NOTE DE 0 À 20

APPRÉCIATIONS

Ne rien écrire dans
cette marge

D est la matrice dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres composant P .

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

$$\text{Donc } A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \times P^{-1}$$