NOM : LAPO STOLET........... Prénom : ...Arsène.......... Groupe : 109

IUT Paris Descartes – Dép. Informatique – Algèbre Linéaire S1 –
DST du 15 Janvier 2018

Sans calculatrice, sans portable, sans document – Durée : 2h.
Le barème est approximatif. Les questions signalées par un astérisque sont en bonus (hors barème).

Exercice 1 (50% de la note totale) 5,75

On rappelle que:

- $M(n,p)$ est l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes
- Le spectre d'une matrice A, noté $Spec(A)$, est l'ensemble de ses valeurs propres
- Pour une matrice A donnée, $E(\lambda)$ désigne l'espace propre associé à la valeur propre λ de A

Dans cet exercice, vous répondrez directement sur le sujet. Pour chaque question, une ou plusieurs réponse(s) sont possibles. Une réponse juste rapporte les points correspondants, une réponse fausse enlève la moitié des points.

Partie I: Questions de cours

1. Une matrice carrée de taille n admet n valeurs propres distinctes
   ☐ vrai ☒ faux
2. Une matrice carrée de taille n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable
   ☒ vrai ☐ faux
3. Une matrice carrée de taille n est diagonalisable si et seulement si elle admet n valeurs propres distinctes
   ☐ vrai ☒ faux
4. Soit A une matrice carrée de taille 6.
   A est telle que $Spec(A) = \{1, 2, -2, 7\}$ avec $\dim(E(7)) = 3$.
   Cochez les affirmations vraies:

   ☒ A est diagonalisable ☐ A n'est pas diagonalisable
   ☐ On ne peut pas savoir si A est diagonalisable, il nous manque les dimensions des autres sous-espaces propres de A
5. Si B est une matrice carrée diagonalisable de taille 5 admettant exactement trois valeurs propres distinctes λ, μ et δ, alors

   ☐ l'un au moins des espaces propres est de dimension 2
   ☒ l'un au moins des espaces propres est de dimension supérieure ou égale à 2
   ☐ deux au moins des espaces propres sont de dimension supérieure ou égale à 2

Partie II

Dans $\mathbb{R}^3$, $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ désigne la base canonique. On considère les matrices et résultats suivants:

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- On considère une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique E est donnée par $A = Mat_E(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- On admet que 0 et 1 sont des valeurs propres de A.
- On admet que $AX = 0_{\mathbb{R}^3} \iff X = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -a \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$.

Indications: Lisez bien les informations de l'énoncé, très peu de calculs sont nécessaires pour répondre aux questions.

1. $\vec{v}_1$ est-il vecteur propre de A?
   ☒ oui ☐ non
2. $\vec{v}_2$ est-il vecteur propre de A?
   ☒ oui ☒ non
3. Cochez les affirmations vraies:
   ☐ $\dim(E(0)) \geqslant 1$ ☐ $\dim(E(0)) > 1$ ☒ $\dim(E(0)) = 1$ ☐ $\dim(E(0)) = 2$
   ☐ On ne peut pas connaître $\dim(E(0))$
4. Cochez les affirmations vraies:
   ☐ $\dim(E(1)) = 2$ car $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont linéairement indépendants
   ☐ $\dim(E(1)) \geqslant 2$ car $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont linéairement indépendants
   ☒ $\dim(E(1)) = 2$ car $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont linéairement indépendants et $\dim(E(0)) \geqslant 1$
   ☒ On ne peut pas connaître $\dim(E(1))$ sans calculs supplémentaires.
5. $E(0) =$
   ☐ $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ☐ $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ ☐ $Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ ☐ $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
   ☐ $Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ☒ $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
6. Cochez les affirmations vraies:

   ☐ A admet d'autres valeurs propres que 0 et 1
   ☒ A n'admet pas d'autres valeurs propres que 0 et 1
   ☒ On ne peut pas savoir si A admet d'autres valeurs propres que 0 et 1 sans calculs supplémentaires

7. Cochez les affirmations vraies:

- ☐ A n'est pas diagonalisable
- ☒ A est diagonalisable
- ☐ On ne peut pas savoir si A est diagonalisable sans calculs supplémentaires

8. Parmi les produits matriciels suivants, indiquez ceux qui sont égaux à A:

- ☒ $P_1D_1P_1^{-1}$ où $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- ☐ $P_2D_2P_2^{-1}$ où $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- ☐ $P_3D_3P_3^{-1}$ où $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- ☐ $P_4D_4P_4^{-1}$ où $P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- ☐ $P_5BP_5^{-1}$ où $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- ☐ $P_6CP_6^{-1}$ où $P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- ☐ aucun des produits précédents n'est égal à A

9. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- ☐ f est une symétrie
- ☐ f est une projection
- ☐ f est une symétrie par rapport à l'espace $E(1)$, parallèlement à l'espace $E(0)$
- ☐ f est une symétrie par rapport à l'espace $E(0)$, parallèlement à l'espace $E(1)$
- ☐ f est une projection sur l'espace $E(1)$, parallèlement à l'espace $E(0)$
- ☐ f est une projection sur l'espace $E(0)$, parallèlement à l'espace $E(1)$
- ☐ f n'est ni une symétrie ni une projection

10. * Cochez les affirmations vraies:

- ☐ f est une bijection de $\mathbb{R}^3$
- ☐ A n'est pas inversible
- ☐ $\dim(Ker(f)) = 2$
- ☐ f est de rang 2

Exercice 2 (30% de la note totale)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

On admet que 3 et 7 sont les valeurs propres de A.

1. Proposer une base et donner la dimension de chaque sous-espace propre de A.
2. Proposer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. (On ne demande pas le calcul de P^{-1}).
3. En déduire une expression de A^n en fonction de P et D.
4. * Calculer A^n en fonction de n.

Exercice 3 (20% de la note totale)

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même partielle, sera évaluée.

Conseils: Traduisez toutes les données de la question, en introduisant des notations appropriées si besoin. On pourra aussi s'aider de figures.

1. Quelle est la matrice, rapportée à la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de la symétrie par rapport à la droite $d_1 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ parallèlement à la droite $d_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$?
2. Quelle matrice carrée de taille 2 représente, dans la base canonique, la rotation autour de l'origine et d'angle 45 degrés (ou $\frac{\pi}{4}$ radians)? (on donne $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$)
3. Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $a_{1,2} \neq 0$, n'admettant qu'une unique valeur propre λ, peut-elle être diagonalisable?
   Indications: On pourra raisonner par l'absurde.
   Si besoin travailler avec $n = 3$ ou $n = 4$ pour commencer.
4. * Que peut-on dire d'une matrice de taille n dont le noyau est de dimension n?