NOM : LAPOSTOLET Prénom : Arsène Groupe: 109

IUT de Paris – Dép. Informatique – Algèbre Linéaire –
Interrogation du 29 novembre 2017

Sans portable, sans document. Durée : 30min. Il est demandé de justifier vos réponses.

7,5 / 10

Exercice 1 $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
Soit la famille $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ où $\vec{b}_1 = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ et $\vec{b}_2 = 7\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$.

1. Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Parmi les matrices suivantes, quelles sont les matrices de changement de base? Les nommer et les légender.
$\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$
3. Ecrire les coordonnées dans la base E des vecteurs suivants:
$\vec{e}_1, \vec{b}_1, : \vec{v}$ tel que $Coord_B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
4. Ecrire les coordonnées dans la base B des vecteurs suivants:
$\vec{e}_1, \vec{b}_1, ; \vec{u}$ tel que $Coord_E(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) On sait que B est une base de $\mathbb{R}^2$ ssi sa matrice est inversible.
On $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ On remarque que :
- B n'a aucune ligne ou colonne nulle
- Aucune ligne ou colonne de B n'est la combinaison linéaire d'une autre

2

On peut donc dire que la matrice de B est inversible. Par conséquence, B est bien une base de $\mathbb{R}^2$

2) La matrice de changement de base est : $Coord(B) = B^{-1}$. On calcule donc l'inverse de la matrice de B par le pivot de Gauss. (Voir au dos).

$\frac{1}{2}$

L_1 5 7 | 1 0   On normalise $L_1 \leftarrow \frac{L_1}{5}$ 1 7/5 | 1/5 0

L_2 2 3 | 0 1   2 3 | 0 1

$$\begin{array}{l|cc|cc} L_1 & 1 & 7/5 & 1/5 & 0 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 & 0 & 1/5 & -2/5 & 1 \end{array}$$

On normalise

$$\begin{array}{l|cc|cc} L_1 & 1 & 7/5 & 1/5 & 0 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|cc|cc} L_1 \leftarrow L_1 - 7/5 L_2 & 1 & 0 & 3 & -7 \\ L_2 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}$$

Donc $\text{Coord}_E(B) = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Donc les matrices de changement de bases sont

$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\text{Coord}_E(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\text{Coord}_E(\vec{b_1}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2/3

$\text{Coord}_E(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\times1+7\times2 \\ 3\times1+7\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{12} \\ 7 \end{pmatrix}$ 19

2 3

4) $\text{Coord}_B(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times3 + (-7)\times0 \\ -2\times1 + 5\times0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\text{Coord}_B(\vec{b_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{2,5}{3}$

$\text{Coord}_E(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times(-2)+(-7\times1) \\ (-2)\times2 + 5\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \end{pmatrix}$ 9

5/5

Exercice 2 On travaille dans $\mathbb{R}^3$ et on désigne $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sa base canonique.

On admet que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

On considère trois vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, et on note V la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

1. V est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier. V est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi sa matrice est inversible

1 Or, D'après $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ la matrice de V est B
Et B est inversible
Par conséquent, on peut dire que V est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Compléter les égalités suivantes:

1 • $\text{Coord}_V(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1 • $\text{Coord}_V(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1 • $\vec{v}_2 = -4\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3$

1 • $\vec{e}_1 = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 4\vec{v}_3$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 0 + -4 + 4\times 0 \\ 2 + 0 + 1 \\ 0\times 4 + 1 + 0\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

5/5

Exercice 3 On considère dans Scilab le fichier de commandes suivant:

```
function [Y] = diagp(M)
        tailleM=size(M);

        if tailleM<>[3,3] then
                Y='Argument invalide.';
        else
                M(1,1)=2+M(1,1);
                M(2,2)=2+M(2,2);
                M(3,3)=2+M(3,3);
                Y=M;
        end
endfunction
```

On rappelle que `M(i,j)` est l'élément de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de la matrice M.

1. Quel est le nom de la fonction? Le nom de la fonction est diagp
2. Le nom de son (ses) argument(s)? Son argument est M
3. Le nom de son(ses) résultat(s)? Son résultat est Y
4. On exécute le fichier. Que répond *Scilab* à la commande `diagp([1 2;3 4])`? Le fonction renvoie "Argument invalide"
5. Que répond *Scilab* à la commande `diagp([1,1,1;2,2,2;3,3,3])`?
   La fonction renvoie :

   Y = [2,1,1;2,4,2;3,3,5]