IUT Paris Descartes – Dép. Informatique – Analyse et Méthodes numériques S2 – DST du 30 mai 2016

Sans calculatrice, sans portable, sans document. Seule une page A4 (recto simple) manuscrite est autorisée. – Durée : 1h30min. Il est demandé de justifier soigneusement vos réponses.

ATTENTION : On veillera à rendre l'annexe avec la copie, en complétant vos noms, prénoms et groupe.

Rappels : $\ln(1) = 0$ $\ln(e) = 1$ $e \simeq 2,72$ $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

Exercice 1 (7 points)

1. Pour chacune des suites (u_n) suivantes définies pour $n \geqslant 1$, dire, sans aucune justification, si :

   - u_n n'admet aucune limite en $+\infty$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

   Une réponse correcte rapporte 0.5 points, une réponse fausse *enlève* 0.25 points, une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

   (a) $u_n = (-1)^n \ln(n)$

   (b) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

   (c) $u_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n$

   (d) $u_n = \frac{(\ln(n))^3}{n^2}$

   (e) $u_n = \frac{n^2 \ln(n)}{2^n}$

   (f) $u_n = 2^n - n!$

   (g) $u_n = \frac{n^2 - n\ln(n) + 1}{(n+1)^2}$

   (h) $u_n = \frac{e^n}{3^n}$

   (i) $u_n = \frac{e^n}{2^n}$

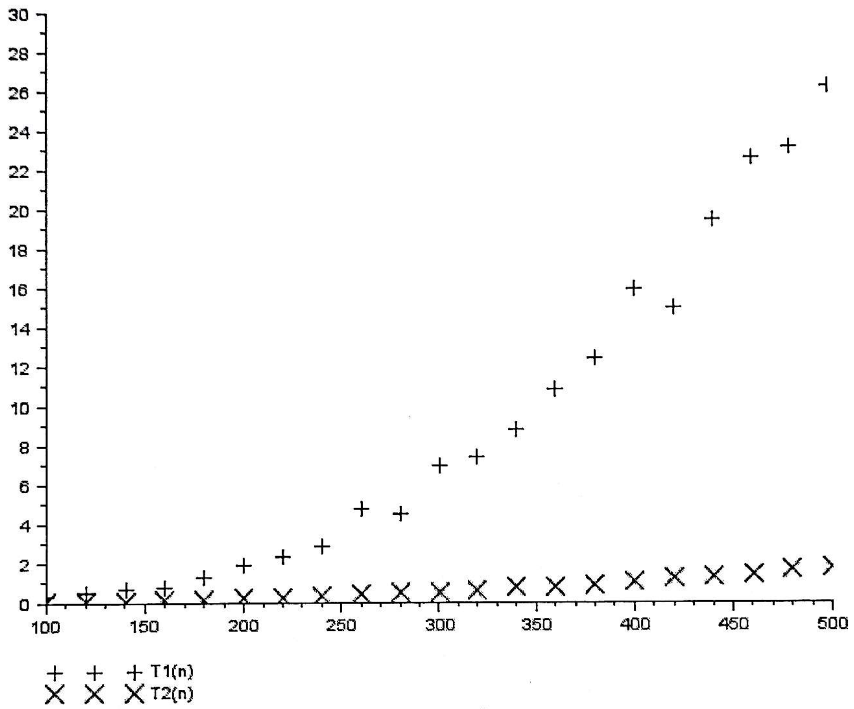
   (j) $u_n = e^{\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{1}{n}\right)}$

2. Justifier vos réponses pour les questions 1.d et 1.h uniquement.

Exercice 2 **(7 points)**

On considère trois algorithmes numérotés de 1 à 3 effectuant une même tâche sur une donnée de taille n. On s'intéresse au temps d'exécution $Ti(n)$ de chaque algorithme i en fonction de la taille n de l'argument d'entrée.

On effectue des simulations pour les algorithmes 1 et 2, avec des entrées aléatoires de taille n, pour n allant de 100 à 500. On obtient le graphique suivant :



1. Quel(s) type(s) de croissance asymptotique peut-on envisager pour les temps $T1(n)$ et $T2(n)$?
2. (a) Pour aller plus loin, on trace les courbes
   $C_1 : \ln(n) \mapsto \ln(T1(n))$ et $C_2 : \ln(n) \mapsto \ln(T2(n))$ données en annexe 1.
   On peut considérer qu'on obtient quasiment des droites.
   En utilisant le graphique, estimez les valeurs approchées des pentes (ou coefficients directeurs) a_1 et a_2 de chacune des courbes C_1 et C_2. (on laissera en évidence les éventuels traits de construction sur le graphique et les éventuels calculs).
   Indication : On devrait trouver $a_2 > 1$.

   (b) En déduire que $T1(n) = K \times n^{a_1}$ et $T2(n) = L \times n^{a_2}$ où K et L sont des constantes positives. (On ne demande pas de déterminer K et L.)

   (c) Montrer qu'alors $T1(n) = O(n^{a_1})$ et $T2(n) = O(n^{a_2})$.

   (d) De quel type sont les complexités temporelles $T1(n)$ et $T2(n)$?
3. Une étude expérimentale du temps calcul du troisième algorithme a fourni $T3(n) = n\ln(n)$.

   (a) Montrer que $n\ln(n) = o(n^{a_2})$.

   (b) Quel est l'algorithme le plus efficace du point de vue de la complexité temporelle ?

Exercice 3 (7 points)

On propose les quatre scripts suivants :

```
function [u,n]=Script1(a,b,f,e)
    u=a;
    v=b;
    n=0;
    while (abs(u-v)>e)
        v=u;
        u=u-f(u)*(b-u)/(f(b)-f(u));
        n=n+1;
    end
endfunction
```

```
function [u,n]=Script2(a,b,f,e)
    u=0;
    v=b;
    n=0;
    while (abs(u-v)>e)
        v=u;
        u=u-f(u)*(a-u)/(f(a)-f(u));
        n=n+1;
    end
endfunction
```

```
function [u,n]=Script3(a,b,f,e)
    u=a;
    v=b;
    n=0;
    while (abs(u-v)<e)
        m=(u+v)/2;
        if f(u)*f(m)<0 then
            v=m;
        else
            u=m;
        end
        n=n+1;
    end
endfunction
```

nul !

```
function [u,n]=Script4(a,b,f,e)
    u=a;
    v=b;
    n=0;
    while abs(u-v)>e
        m=(u+v)/2;
        if f(u)*f(m)<0 then
            v=m;
        else
            u=m;
        end
        n=n+1;
    end
endfunction
```

Dichotomie

1. (a) Quels sont les arguments d'entrée et de sortie du script 1 ? Que représentent-ils ?
   (b) Pour appliquer la méthode de la sécante à la fonction f dont la courbe est donnée en annexe 2, quel script doit-on exécuter ? Quelles valeurs peut-on donner pour a et b ? Proposer une valeur raisonnable pour e.
   (c) Construire sur le graphique en annexe 2 les quatre premiers termes (u_0, u_1, u_2, et u_3) de la suite correspondant à la méthode de la sécante, en prenant pour a et b les valeurs de la question 1.b. (On mentionnera clairement les termes u_0, u_1, u_2, et u_3 sur le graphique).
   (d) Quel(s) script(s) correspond(ent) à l'algorithme de dichotomie ?
   (e) En appliquant le script 3 à la fonction de la question 1.b, on obtient en sortie $n = 0$. Que cela signifie-t-il ? Corriger le script en conséquence.
2. (a) Selon ce qui a été vu en cours, quelle est la complexité de l'algorithme de recherche par dichotomie d'un élément dans une liste ordonnée de taille n ?
   (b) *(Bonus)* : Justifier.