MATHS TD1

Exercice 1

1) a) $n^2(\ln n)^3 = o(n^3)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(\ln n)^3}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$$

$$= 0$$

donc on a bien $n^2(\ln n)^3 = o(n^3)$

b) $2^n \ln n + n^6 = O(e^n)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n \ln + n^6}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{e^n} \quad \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n\ln(2)}}{e^n} \quad n < \frac{2}{e} < 1$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{e^n}$$

$$= 0$$ Or 0 est une limite finie

c)

c) si $0 < a < b$ alors $a^n = o(b^n)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{b^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$a < b$ donc $\frac{a}{b} < 1$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$

2)

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 \ln n}{n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^4}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$

$= 0$

donc on a : $n^3 \ln n = o(n^4)$

d'où $n^3 \ln n \ll n^4$

b)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(\ln n)^2 + n^3 - n}{n^3(\ln n)^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n^2(\ln n)^2 + n^2 - 1)}{n^3(\ln n^2)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(\ln n)^2 + n^2 - 1}{n^2(\ln n)^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(\ln n)^2 + n^2}{n^2(\ln n)^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^2}{(\ln n)^2}$$

$= 1$ or 1 est une limite finie

donc on a bien :

$n^3(\ln n)^2 + n^3 - n = O(n^3(\ln n)^2)$

b) $3^n = o(e^n)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{e}\right)^n$$ or $3 > e^1$ donc $\frac{3}{e} > 1$

d'où $\lim_{n\to} \left(\frac{3}{e}\right)^n = +\infty$

donc o est faux

d) $\lim_{n\to+\infty} n^3 + (\ln n)^3 = \lim_{n\to+\infty} n^3$

or n^3 est un monome de degré 3. On a donc bien une complexité polynomiale.

Exercice 6

1) $T_1 : n^\alpha$ 2)

$T_2 : \ln n$

2) $\alpha_1 = \frac{3{,}25-(-0{,}3)}{6{,}2-5{,}5} = \frac{3}{1{,}1} = 3$

$\alpha_2 = \frac{0{,}45-(-2{,}5)}{\ldots} = \frac{2{,}95}{\ldots} \simeq 2{,}23$

b) ona:

$T_1(n) = \log(K \times n^3)$

$= \ln(K \times n^3)$

$\ln(T_1(n)) = \alpha_1 \ln n + b$

$T_1(n) = e^{\alpha_1 \ln n + b}$

$T_1(n) = n^{\alpha_1} \times e^b$ idem $T_2(n)$

c)

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{K n^{\alpha_1}}{n^{\alpha_1}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{\alpha_1}}{n^{\alpha_1}} = 1$ or c'est une limite finie strictement positive,

donc a bien $T_1(n) = \Theta(n^{\alpha_1})$
idem $T_2(n)$

d) $T_1(n)$ et $T_2(n)$ ont des complexité temporelles de $\Theta(n^{\alpha})$.

2) a) $n \ln(n) = O(n^{\alpha})$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n \ln(n)}{n^{\alpha}} = \dfrac{n}{n^{\alpha}} = \dfrac{1}{n^{\alpha - 1}} = 0$

donc on a bien $n \ln(n) = o(n^{\alpha})$

c'est T3 le plus efficace.

Scanned by CamScanner