Théorie des graphes

Sébastien Martin

sebastien.martin@parisdescartes.fr

I.U.T. Paris Descartes

DUT Informatique, 2017-18

Introduction

De manière générale, un graphe est :

- un ensemble de sommets ;
- un ensemble d'arêtes ou arcs qui relient ces sommets.

Modélisation :

- réseau de télécommunications (internet, téléphonique, postal...) ;
- réseau de transport (réseau routier, ferré, aérien...) ;
- jeux (tableau de présentation d'un tournoi sportif à élimination directe)
- médecine (arbre bronchique, réseau sanguin...)
- etc.

Graphes orientés

Définition (Graphe orienté)

Un **graphe orienté** $G = (S, A)$ *est la donnée*

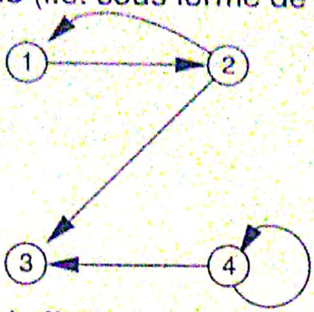
- *d'un ensemble fini S dont les éléments sont les* **sommets** *du graphe,*
- *d'un ensemble A dont les éléments, appelés* **arcs**, *sont des couples (ou paires ordonnées) d'éléments de S.*

Dans ce cours, nous nous limiterons à l'étude de graphes orientés **simples** : le cas des graphes **multiples** (i.e. avec plusieurs arcs différents) ne sera pas abordé.

Graphes orientés | Définitions

Différentes représentations pour un graphe orienté :

- représentation dite **sagittale** (i.e. sous forme de dessin) :



- représentation sous forme de **listes** :

S = 1, 2, 3, 4
A = (1,2) (2,1) (2,3) (4,3) (4,4)

ou d'une **liste unique** (*comment lire cette liste ?*) :

$$L = (4,1,2,3,4,1,2,2,1,2,3,4,3,4,4)$$

- représentation sous forme **matricielle** : voir *matrice d'adjacence*

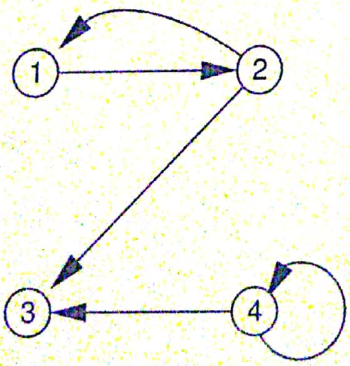
Graphes orientés | Définitions

Définition (Matrice d'adjacence)

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté dont on a numéroté les sommets de 1 *à* n. *La* **matrice d'adjacence** $M = (m_{ij})$ *du graphe orienté* G *est la matrice carrée de taille* $n \times n$ *définie par*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ (i,j) \in A, \\ 0, & si\ (i,j) \notin A. \end{cases}$$

Pour le graphe considéré, la matrice d'adjacence M est définie par



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

en ligne : les sommet
en colonne : les arcs

Définition (Sommets adjacents, prédécesseur, successeur)

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Soient x et y deux éléments de S tels que $a = (x, y)$ est un arc de G. Alors,

- *x et y sont dits* **adjacents** *;*
- *le sommet x est un* **prédécesseur** *de y ;*
- *le sommet y est un* **successeur** *de x.*

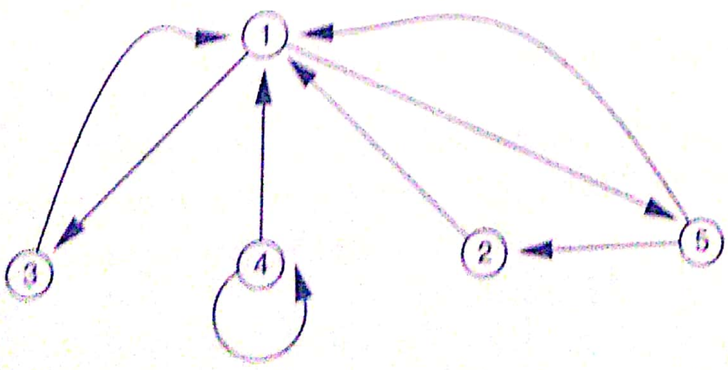
On note $N^+(x)$ l'ensemble des successeurs d'un élement $x \in S$.

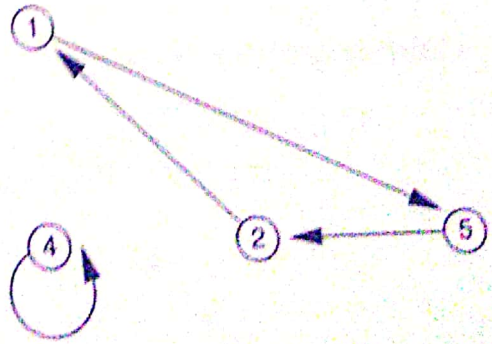
On note $N^-(x)$ l'ensemble des prédécesseurs d'un élement $x \in S$.

Définition (Sous-graphe)

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Alors, un **sous-graphe** *de G est un graphe orienté $G' = (S', A')$ ayant pour sommets un sous-ensemble S' des sommets de G et ayant pour arcs un sous-ensemble $A' \subset A$.*

Un graphe orienté G et un sous-graphe G' :

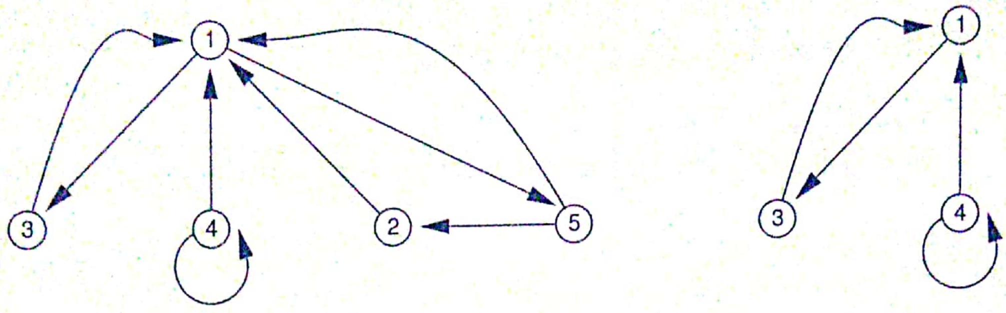




Définition (Sous-graphe induit)

Un sous-graphe $G' = (S', A')$ d'un graphe orienté $G = (S, A)$ est un **sous-graphe induit** *si A' est formé de tous les arcs de G ayant leurs extrémités dans S'.*

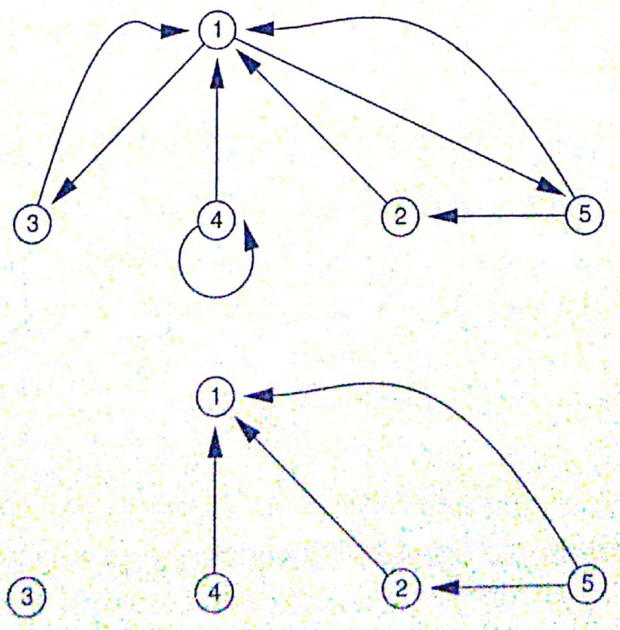
Pour le graphe orienté G défini ci-dessous, on peut déterminer le sous-graphe orienté induit par $S' = \{1, 3, 4\}$:



Définition (Sous-graphe couvrant ou graphe partiel)

Un sous-graphe $G' = (S', A')$ d'un graphe orienté $G = (S, A)$, avec $A' \subseteq A$, est dit **couvrant** *s'il contient tous les sommets de G (i.e. $S' = S$). On parle aussi de graphe partiel (induit par A').*

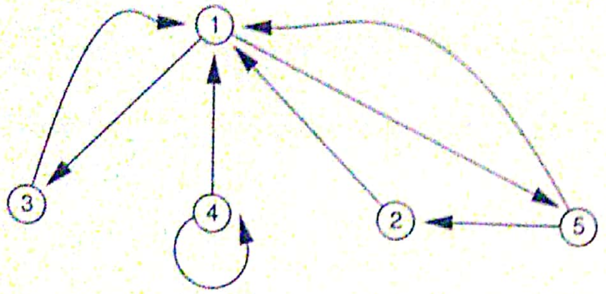
Un graphe orienté et un graphe couvrant :



Définition (Degrés d'un sommet)

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

- On appelle **degré entrant** du sommet x le nombre de prédécesseurs de x ; on le note $d^-(x)$.
- On appelle **degré sortant** du sommet x le nombre de successeurs de x ; on le note $d^+(x)$.
- On appelle **degré total** du sommet x le nombre d'arcs dont x est l'origine ou l'extrémité finale (en comptant deux fois les boucles) ; on le note $d(x)$ et on a $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$.



$d^-(1) = 4$	$d^+(1) = 2$	$d(1) = 6$
$d^-(2) = 1$	$d^+(2) = 1$	$d(2) = 2$
$d^-(3) = 1$	$d^+(3) = 1$	$d(3) = 2$
$d^-(4) = 1$	$d^+(4) = 2$	$d(4) = 3$
$+\ d^-(5) = 1$	$d^+(5) = 2$	$d(5) = 3$
2 8		

Graphes orientés | Définitions

Théorème (– des poignées de mains)

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On a alors les égalités suivantes :

$$\sum_{x \in S} d^-(x) = \sum_{x \in S} d^+(x) = \text{card}(A),$$

$$\sum_{x \in S} d(x) = \sum_{x \in S} d^+(x) + \sum_{x \in S} d^-(x) = 2\text{card}(A).$$

Preuve. Chaque arc (x, y) compte deux fois dans ~~la~~ somme des degrés : une fois dans $d^+(x)$ et une fois dans $d^-(y)$, d'où :

$$\sum_{x \in S} d^+(x) = \sum_{x \in S} d^-(x) = \sum_{i=1}^{\text{card}(A)} 1 = \text{card}$$

■

Corollaire

Dans un graphe orienté, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Scanned by CamScanner

Définition (Chemin)

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Un **chemin** *C est une suite $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ de sommets de G telle que deux sommets consécutifs quelconques s_i et s_{i+1} sont reliés par un arc de G :*

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad (s_i, s_{i+1}) \in A.$$

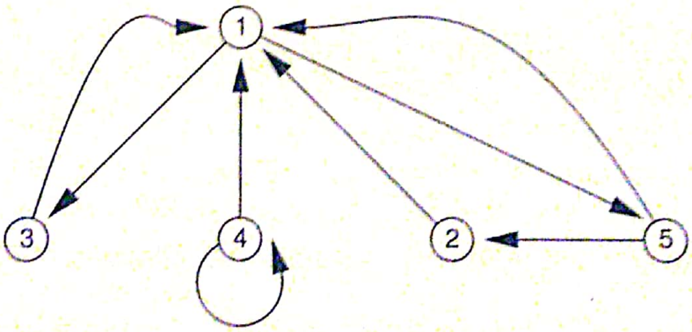
Par ailleurs,

- *les sommets s_0 et s_n sont* **l'origine** *et* **l'extrémité** *du chemin C ;*
- *le chemin C est formé de $n + 1$ sommets et de n arcs ; sa* **longueur** *est égale au nombre d'arcs.*

Un chemin peut comporter un seul sommet et être de longueur nulle.

Définition (Circuit)

On appelle **circuit** *un chemin de longueur non nulle et dont l'extrémité et l'origine sont identiques.*



Parmi les listes suivantes, lesquelles sont des chemins ? des circuits ?

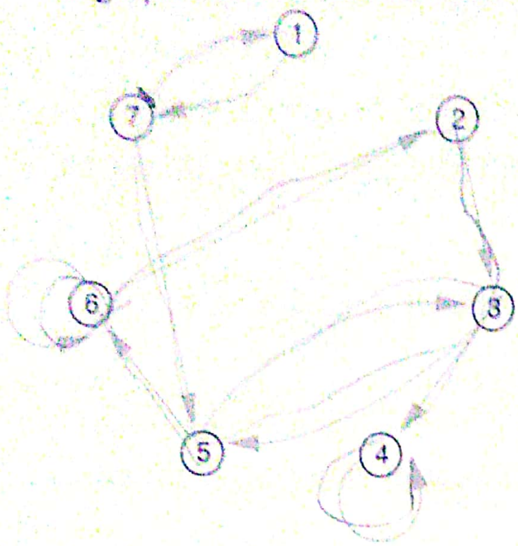
	chemin	circuit
(3,1,5)	✓	
(1,3,4)		
(2)	✓	
(4,1,2,5)		
(2,1,5,2,1,3,1,3)	✗	
(1,5,2,1)	✓	✓
(1,5,2,1,5,2,1)	✓	✗
(4,4,4,4,4,4)	✓	✗

Scanned by CamScanner

Définition (Chemin ou circuit eulérien)

Soit G = (S, A) un graphe orienté. Un chemin ou un circuit **eulérien** *est un chemin ou un circuit passant* une et une seule fois par tous les arcs *de G.*

Le graphe orienté suivant admet-il un chemin eulérien ? un circuit eulérien ?

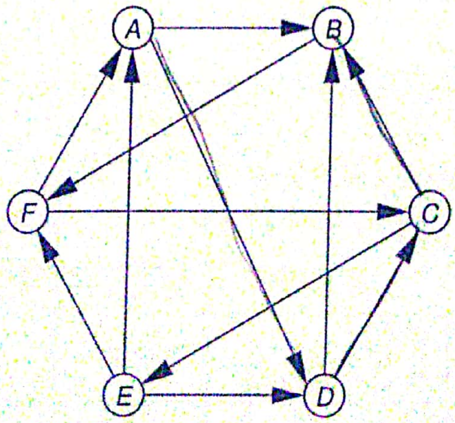


OUI

Définition (Chemin ou circuit hamiltonien)

Soit G = (S, A) un graphe orienté. Un chemin ou circuit **hamiltonien** *est un chemin ou circuit passant* une et une seule fois par tous les sommets *de G.*

Le graphe orienté suivant admet-il un circuit hamiltonien ?



OUI

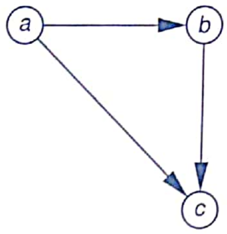
B,F,C,E,A,D,B

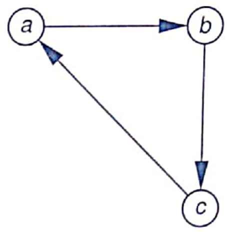
Définition (Connexité forte)

Un graphe orienté est **fortement connexe** *si, pour tout couple de sommets x et y, il existe un chemin reliant x à y.*

Remarque. Si x et y sont deux sommets d'un graphe orienté fortement connexe, alors il existe *un chemin reliant x à y* **ET** *un chemin reliant y à x.* □

Les graphes suivants sont-ils fortement connexes ?





Théorème (Condition nécessaire et suffisante de forte connexité)

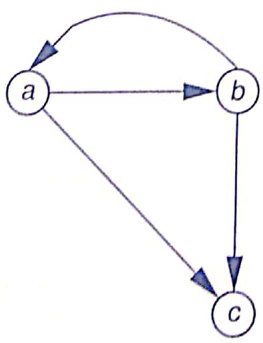
Un graphe orienté est fortement connexe si, et seulement si, pour tous couples de sommets x et y, il existe un circuit passant par x et y.

Graphes orientés | Forte connexité

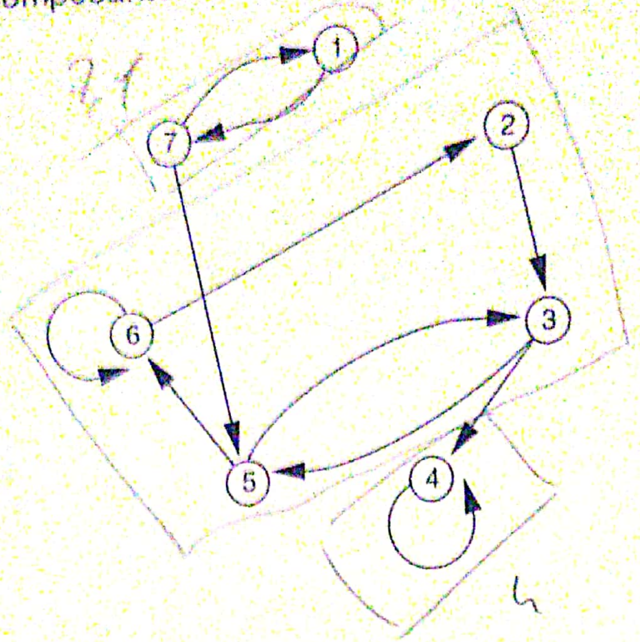
Définition (Composantes fortement connexes)

Une **composante fortement connexe** *C d'un graphe orienté $G = (S, A)$ est un sous-ensemble* **maximal** *de sommets tels que deux quelconques d'entre eux soient reliés par un chemin.*

Quelles sont les composantes fortement connexes de ce graphe orienté ?



Quelles sont les composantes fortement connexes de ce graphe orienté ?



6,2,5,3

Graphes orientés | Forte connexité

Propriétés

- *Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté et C une composante fortement connexe du graphe. Si $x \in C$, alors*

  pour tout $y \in C$, il existe un circuit passant par x et y ;

  pour tout $z \in S \setminus C$, il n'existe pas de circuit passant par x et z.
- *Les composantes fortement connexes d'un graphe orienté $G = (S, A)$ forment une* **partition** *de S.*
- *Un graphe orienté est fortement connexe si, et seulement si, il a une seule composante fortement connexe.*
- *Le sous-graphe orienté induit par une composante fortement connexe est fortement connexe.*
- *La composante fortement connexe C contenant un sommet x est*

$$\{y \in S \ : \ \text{il existe un chemin reliant } x \text{ à } y \text{ et un chemin reliant } y \text{ à } x\}.$$

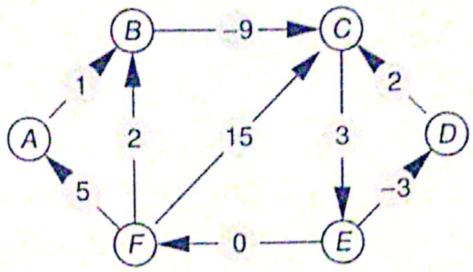
Définition (Graphes valués)

Un graphe orienté $G = (S, A)$ est **valué** *s'il est muni d'une application*

$$\begin{array}{rcccc} f & : & A & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

appelée **valuation**. *Le réel $f(x,y)$ est aussi appelé* longueur *(ou* coût *ou* poids*) de l'arc (x,y). La* valuation *(ou* longueur*) d'un chemin est la somme des valuations (longueurs des arcs qui le composent).*

Exemple de graphe orienté valué :



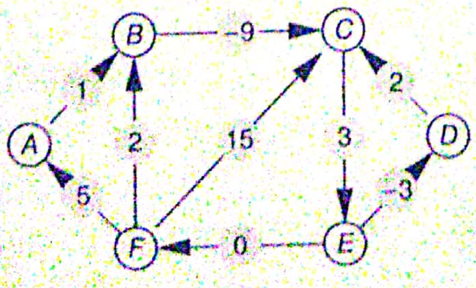
On peut représenter un graphe valué par une matrice carrée, dont les coefficients correspondent à la valuation des arcs.

Définition (Matrice de valuation)

Soit $G = (S, A, f)$ un graphe valué dont on a numéroté les sommets de 1 à n. La matrice de valuation de G est la matrice carrée $M = (m_{ij})$, de taille $n \times n$, définie par

$$m_{ij} = \begin{cases} f(i,j), & si\ (i,j) \in A, \\ \infty, & si\ (i,j) \notin A. \end{cases}$$

Pour le graphe orienté valué, la matrice de valuation M est définie par :



$$M = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & -9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & -3 & \infty & 0 \\ 5 & 2 & 15 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

La valuation du chemin (A, B, C, E, D, C) est -6

Graphes non orientés

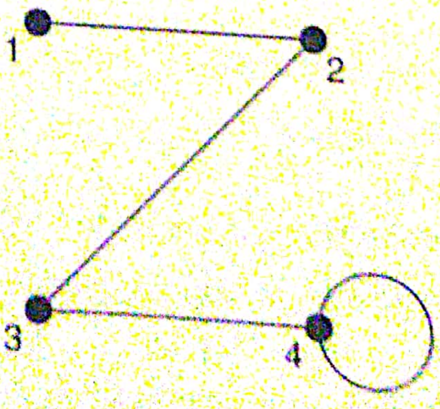
Graphes non orientés | Définitions

Définition (Graphe non orienté)

Un **graphe non orienté** $G = (S, A)$ *est la donnée*

- *d'un ensemble fini S dont les éléments sont les* **sommets** *du graphe,*
- *d'un ensemble A dont les éléments, appelés* **arêtes**, *sont des couples (ou paires non ordonnées) d'éléments de S.*

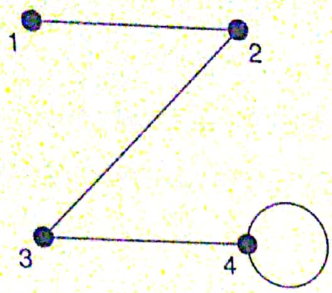
$S = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$



Définition (Matrice d'adjacence)

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté à n sommets $\{i\}_{i=1,\dots,n}$. La matrice d'adjacence $M = (m_{ij})$ du graphe orienté G est la matrice à n lignes et n colonnes définie par

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ (i,j) \in A, \\ 0, & si\ (i,j) \notin A. \end{cases}$$



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Dans un graphe non orienté, la matrice d'adjacence est nécessairement symétrique □

Définition (Degrés d'un sommet)

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. On appelle **degré** *d'un sommet x et on note $d(x)$ le nombre d'arêtes dont x est une extrémité (en comptant deux fois les boucles).*

Pour les graphes non orientés, le théorème des poignées de mains est adapté de la manière suivante :

Théorème (– des poignées de mains)

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Alors $\sum_{x \in S} d(x) = 2\mathrm{card}(A)$.

Preuve. cf début

■

Graphes non orientés | Chaînes et cycles

Les notions de chemins et circuits introduites dans le cadre des graphes orientés s'adaptent au cadre des graphes non orientés : on parle de **chaînes** (au lieu de *chemins*) et de **cycles** (au lieu de *circuits*).

Définition (Chaîne)

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Une **chaîne** *C est une suite $(s_0, s_1, ..., s_n)$ de sommets de G telle que deux sommets consécutifs quelconques s_i et s_{i+1}) sont reliés par une arête de G :*

$$\forall i \in \{0, ..., n-2\}, \quad (s_i, s_{i+1}) \in A.$$

Par ailleurs,

- *s_0 et s_n sont respectivement* l'origine *et* l'extrémité *de la chaîne C ;*
- *la chaîne C est formé de $n+1$ sommets et de n arêtes ; sa* longueur *est égale au nombre d'arêtes.*

Définition (Cycle)

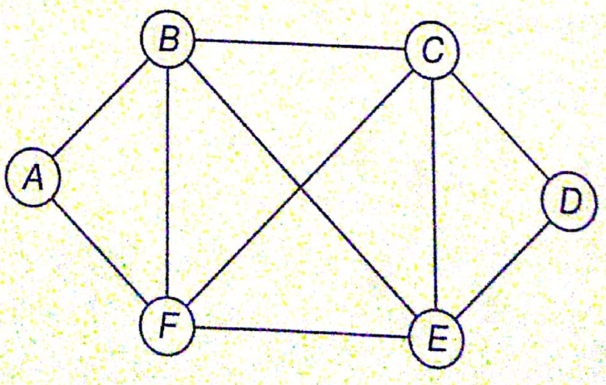
On appelle **cycle** *une chaîne de longueur non nulle et dont l'extrémité et l'origine sont identiques.*

Graphes non orientés | Chaînes et cycles

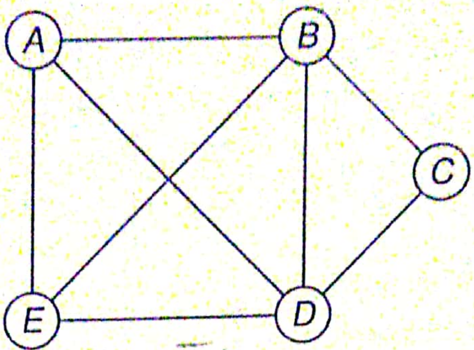
Définition (Chaîne eulérienne ou cycle eulérien)

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Une **chaîne eulérienne** *ou un* **cycle eulérien** *est une chaîne ou un cycle passant une et une seule fois par toutes les arêtes de G.*

Graphe non orienté qui admet un cycle eulérien : B CDEBAFCEFB



Graphe qui admet une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien :



E D B C D A B E A

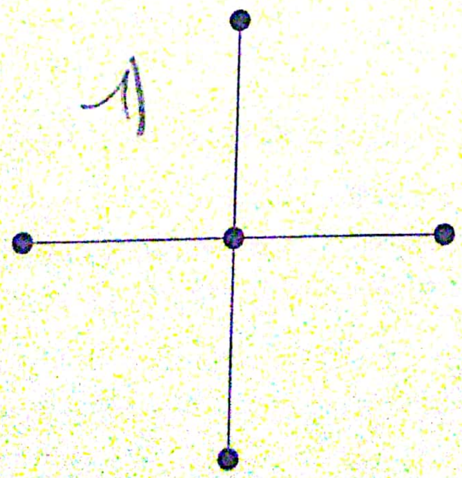
Définition (Chaîne hamiltonienne ou cycle hamiltonien)

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Une **chaîne hamiltonienne** *ou un* **cycle hamiltonien** *est une chaîne ou un cycle passant une et une seule fois par tous les sommets de G.*

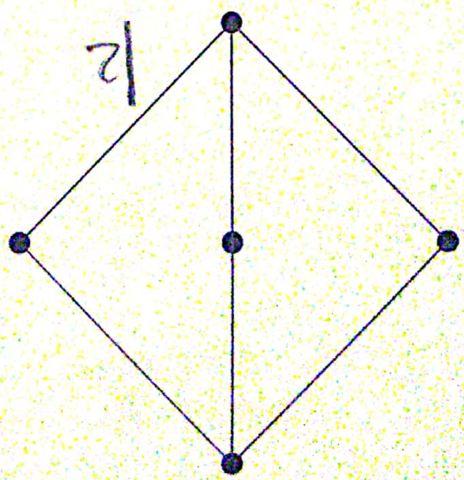
Identifier parmi les graphes ci-dessous celui qui

1. n'admet ni chaîne hamiltonienne ni cycle hamiltonien ;
2. admet une chaîne hamiltonienne mais pas de cycle hamiltonien.

1)



2)



Scanned by CamScanner

Graphes non orientés | Connexité

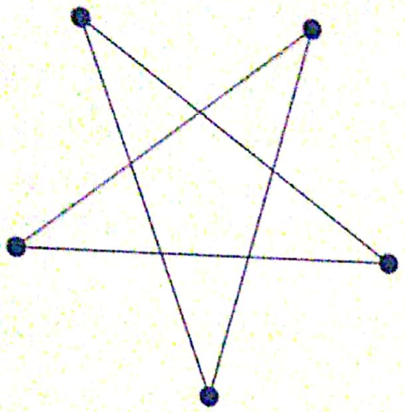
Définition (Connexité)

Un graphe non orienté est connexe *si, pour tout couple de sommets x et y, il existe une chaîne reliant x à y.*

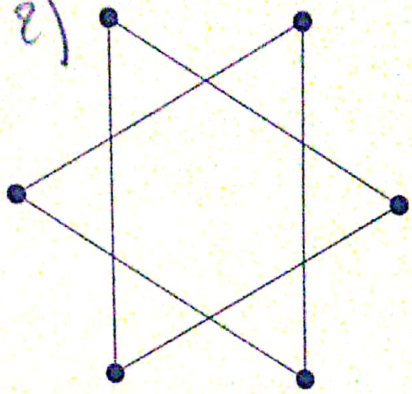
Identifier parmi les graphes ci-dessous celui qui est

1. connexe ;
2. non connexe.

1)



2)

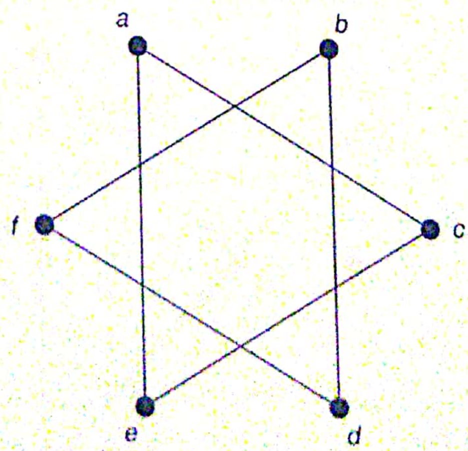


Graphes non orientés | Connexité

Définition (Composante connexe)

Une **composante connexe** C *d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ est un sous-ensemble* maximal *de sommets tels que deux quelconques d'entre eux soient reliés par une chaîne.*

Graphe non orienté avec composantes connexes : a, c, e
f, b, d



Propriétés

- *Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté et C une composante connexe de G. Si $x \in C$, alors*
  - *pour tout $y \in C$, il existe une chaîne passant par x et y ;*
  - *pour tout $z \in S \setminus C$, il n'existe pas de chaîne passant par x et z.*
- *Les composantes connexes d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ forment une partition de S.*
- *Un graphe non orienté est connexe si, et seulement si, il a une seule composante connexe.*
- *Le sous-graphe induit par une composante connexe est connexe.*
- *La composante connexe C contenant un sommet x est*

$$\{y \in S \ : \text{ il existe une chaîne reliant } x \text{ à } y\}.$$

Graphes non orientés | Graphes non orientés valués

Définition (Graphes non orientés valués)

Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est **valué** *s'il est muni d'une application*

$$\begin{array}{cccc} f & : & A & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

appelée valuation. Le réel $f(x,y)$ est aussi appelé **longueur** *(ou coût ou poids) de l'arête (x,y). La* **valuation** *(ou longueur) d'une chaîne est la somme des valuations (longueurs des arêtes qui le composent).*

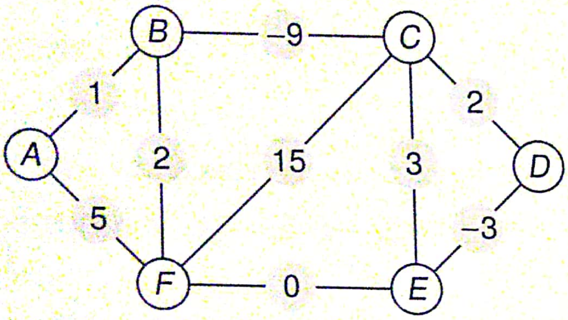
On peut représenter un graphe valué par une matrice carrée, dont les coefficients correspondent à la valuation des arêtes.

Définition (Matrice de valuation)

Soit $G = (S, A, f)$ un graphe non orienté valué dont on a numéroté les sommets de 1 à n. La **matrice de valuation** *de G est la matrice carrée $M = (m_{ij})$, de taille $n \times n$, définie par*

$$m_{ij} = \begin{cases} f(i,j), & \text{si } (i,j) \in A, \\ \infty, & \text{si } (i,j) \notin A. \end{cases}$$

Graphe non orienté valué et sa matrice de valuation :



$$\begin{pmatrix} \infty & 1 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & & -9 & & & 2 \\ \infty & -9 & & 7 & & \\ \infty & & & & & \infty \\ \infty & & & & & 0 \\ 5 & 2 & 15 & \infty & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

La valuation de la chaîne (A, B, C, E, D, E) est