IUT Paris Descartes, Département informatique.

DST : Théorie des graphes 2017-18

Documents, calculatrices, téléphones mobiles : interdits. Durée : 2h.

Barême indicatif : A : 3 pts, B : 7 pts, C : 6 pts, D : 4 pts

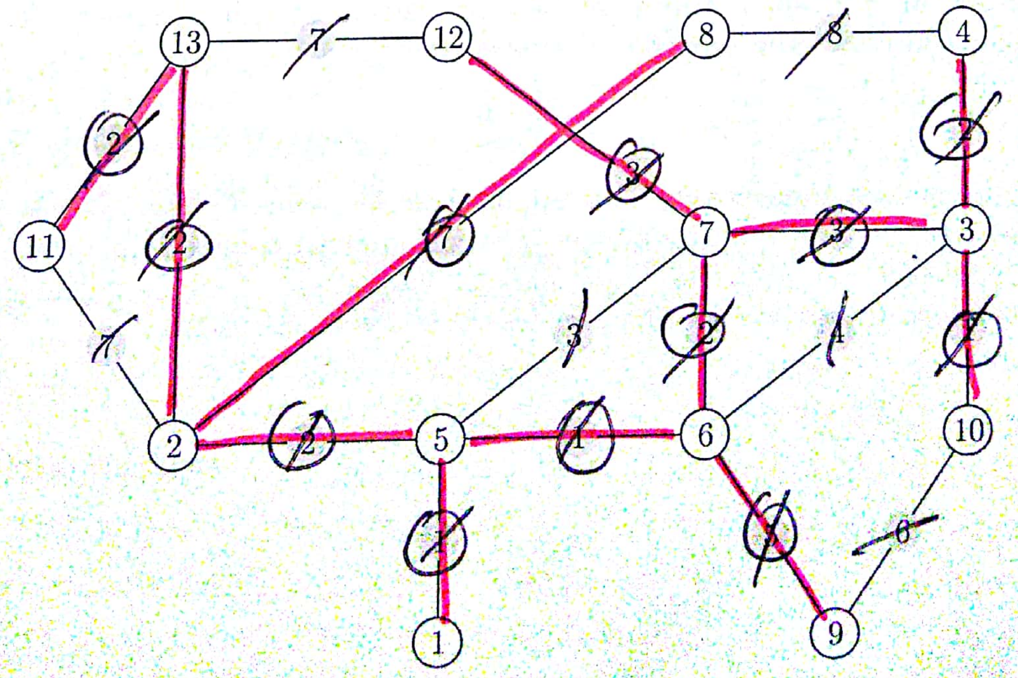
- Les questions A, B, C, D du problème sont indépendantes ; prenez le temps de lire soigneusement l'énoncé.
- Vous disposez, en fin d'énoncé, d'un tableau qui peut être utilisé pour la mise en œuvre d'un algorithme. Notez que la taille du tableau (nombres de colonnes et nombre de lignes) a été arbitrairement choisie et ne donne aucune indication sur son "taux" de remplissage.
- Justifiez soigneusement vos réponses en expliquant la démarche que vous adoptez. En particulier, lors de la mise en application d'algorithmes, fournissez le détail de quelques étapes afin de montrer que la mise en œuvre est correcte.

*** A ***

L'entreprise LBSF possède un vaste site, composé de bâtiments de production (numérotés de 1 à 10) et de bâtiments administratifs (numérotés de 11 à 13). Grace Hopper a été engagée par la PDG de l'entreprise, Mme Simone O., en tant que cheffe de projet en charge de la réorganisation du site de l'entreprise. La première mission de Grace Hopper consiste à réaliser un réseau intranet pour l'ensemble du site, en utilisant les routes d'accès qui relient les bâtiments. L'étude de marché a établi le coût, en k€, de construction des différentes connexions (voir les valuations du graphe). Mais l'entreprise ne souhaite pas construire l'intégralité des liaisons ci-dessous : elle souhaite construire un réseau qui vérifie les deux contraintes suivantes :

1. deux bâtiments doivent être reliés (éventuellement indirectement) ;
2. la construction du réseau doit se faire à coût minimal.

Grace Hopper dispose d'une enveloppe budgétaire de 31 k€ pour réaliser un réseau qui vérifie les deux critères ci-dessus.



A.1) Grace Hopper peut-elle engager les travaux avec l'enveloppe budgétaire qui lui a été allouée ? Justifier soigneusement la réponse.

A.2) À partir de l'arbre obtenu à la question précédente, déterminer l'arbre enraciné que l'on obtient en distinguant le sommet 2. Déterminer les numérotations préfixe et postfixe des sommets de cet arbre enraciné, avec le critère du plus petit choix possible. On présentera les résultats sous la forme de deux listes de sommets constituées selon l'ordre d'apparition des sommets.

*** B ***

Grace Hopper se voit confier la supervision du chantier de construction du bâtiment de stockage, noté S, des éléments fabriqués par l'entreprise. Son équipe réalise l'analyse des tâches suivantes :

Tâche n° i	Description	Durée	La tâche i commence...
1	Construction des accès au site	3	$\emptyset$
2	Fondations	4	2. au plus tôt après la fin de 1
3	Raccordements intranet	18	3 au plus tôt après la fin de 1
			3 au plus tard 3 jours après la fin de 2
4	Mûrs et toiture	12	4 au plus tôt après la fin de 3
5	Aménagements intérieurs	9	5 au plus tôt 3 jours après la fin de 4
6	Aménagements extérieurs	9	6. au plus tôt 2 jours après la fin de 4

Grace Hopper demande à son analyste, formée comme elle au departement INFO de l'IUT Paris Descartes, le temps minimal nécessaire pour fabriquer le site. Son analyste lui répond : 45 jours.

B.1) L'analyste a-t-elle raison ? On justifiera la réponse en établissant :

a) les inégalités associées aux contraintes explicites ;

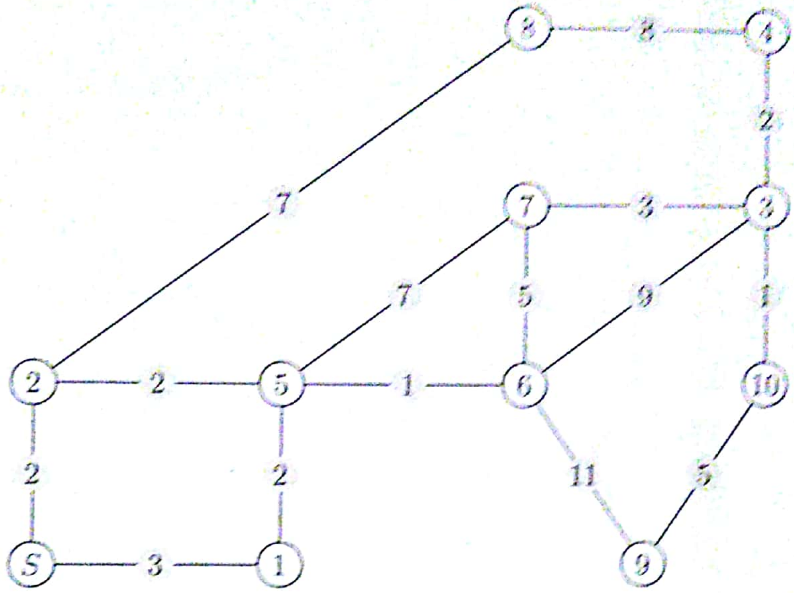
b) le graphe potentiel-tâches associé, en précisant les contraintes implicites qui auront été prises en compte ;

c) l'ordonnancement au plus tôt du projet.

B.2) Déterminer l'ordonnancement au plus tard de chaque tâche si l'on souhaite réaliser le projet en ce temps minimal. Déterminer les marges de chaque tâche. Quelles tâches peut-on retarder sans modifier la durée du projet ?

*** C ***

Le nouveau bâtiment de stockage S a été construit, ainsi que les routes d'accès depuis les bâtiments 1 et 2. La direction de LBSF souhaite évaluer le temps minimal nécessaire pour acheminer un produit fabriqué depuis les bâtiments de production (bâtiments 1 à 10) jusqu'au bâtiment de stockage S. Les temps de parcours sont représentés sur le graphe ci-dessous :



C.1) Déterminer le temps minimal de parcours entre le bâtiment de stockage et les bâtiments de production. Indication : les accès étant à double sens, il est équivalent de déterminer le temps minimal nécessaire pour aller du bâtiment de stockage aux autres bâtiments. **En pratique, on construira la réponse avec le tableau de la page 6 (à rendre avec la copie).**

C.2) En déduire un chemin associé à ce temps minimal pour relier le bâtiment 10 et le bâtiment de stockage S.

*** D ***

Dans la boite à outils numériques de Grace Hopper figure la fonction scilab ci-dessous. Cette fonction scilab correspond à l'algorithme de Dijkstra, mais le fichier a été corrompu...

Dijsktra.sce

```
function [d,P]=Dijkstra(M,f)
// ENTREE :
//     - M : matrice d'adjacence
//     - f : matrice de valuation
// SORTIE :
//     - d : vecteur des distances du sommet 1 aux autres sommets
//     - P : vecteurs des predecesseurs des sommets
N=size(M,1);
Z=zeros(1,N);

// I. INITIALISATION
Z(1)=1;
d(1)=0;
P(1)=%inf;
for i=2:N
    if (M(1,i)==1) then
        d(i)=f(1,i);
        P(i)=1;
```

```
19      else
20          d(i)=1e+6;
21          P(i)=%inf;
22      end
23  end
24
25  while (sum(Z)<N)
26  // II.1.
27      Lnm=[]; Dnm=[];
28      for i=1:N
29          if (Z(i)==0) then
30              Lnm=[Lnm i];
31              Dnm=[Dnm d(i)];
32          end
33      end
34  // II.2.
35      [dmin,pos]=min(Dnm);
36      x=...
37      Z(x)=1;
38  // II.3.
39      for K=1:N
40          if ((Z(K)==0) & (M(x,K)==1)) then
41              if (d(K)>d(x)+f(x,K)) then
42                  ...
43                  ...
44              end
45          end
46      end
47  end
48  endfunction
```

D.1) Pour rétablir l'intégrité du fichier, Grace Hopper doit compléter les lignes 36, 42 et 43 du programme. Quelles sont ces modifications ?

Le bug étant corrigé, elle souhaite valider la fonction scilab ; pour cela elle exécute le fichier Dijkstra.sce puis le script suivant :

main.sce

```
M0=[1, 1, 1, 1;   0,   0, 1,   0;    0, 1,   0,   0;    0, 1, 1, 1];
f0=[2, 8, 6, 3; %inf,%inf, 3,%inf; %inf, 4,%inf,%inf; %inf, 5, 1, 1];

[d0,P0]=Dijkstra(M0,f0)
```

D.2) Le résultat obtenu est incorrect ! Pourquoi ?

***

Question Bonus : Qui était Grace Hopper IRL ?