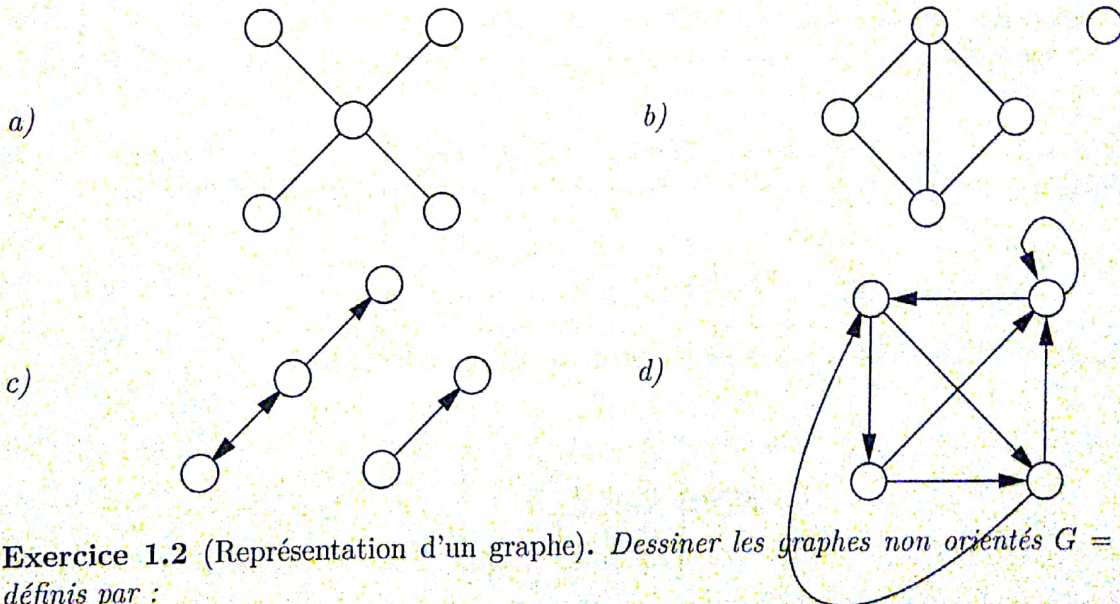


1 Graphes orientés et graphes non orientés

Les exercices 1.1 à 1.3 sont très simples. Profitez-en pour insister sur les points suivants :

- la distinction entre le graphe objet mathématique et sa représentation ;
- à partir d'une définition de graphe comme objet mathématique on peut faire une infinité de représentations différentes juste en bougeant les sommets ;
- de même à partir d'une représentation, si on a le choix des symboles pour les sommets, une infinité de choix sont possibles. Au final les graphes définis ne seront pas formellement les mêmes mais seront « isomorphes », i.e. identiques au nom des sommets près.

Exercice 1.1 (Représentation d'un graphe). Donner une définition formelle des graphes suivants en précisant leurs ensembles de sommets et leurs ensembles d'arêtes ou d'arcs. Utilisez des symboles au choix pour noter les sommets.



Exercice 1.2 (Représentation d'un graphe). Dessiner les graphes non orientés $G = (S, A)$ définis par :

- $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $A = \{ab, ad, bc, cf, df\}$.
- $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ et $A = \{v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4, v_3v_6, v_4v_7, v_5v_5, v_5v_7\}$.
- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $A = \{ij : i \in S, j \in S, i + j > 8\}$.

Exercice 1.3 (Représentation d'un graphe). Dessiner les graphes $G = (S, A)$ définis par :

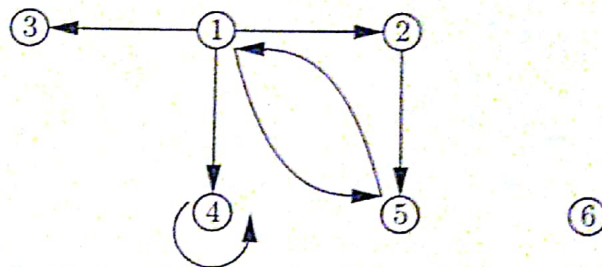
- $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $A = \{ab, ad, bc, ca, ef, df, fc\}$.

- $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ et $A = \{v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_2, v_3v_5, v_5v_3, v_4v_7, v_7v_4\}$.

Exercice 1.4 (Représentation d'un graphe). Représenter le graphe orienté $G = (S, A)$ où $S = \{1, 2, \dots, 5\}$ et (x, y) appartient à A si, et seulement si, x divise strictement y . Comment ce graphe est-il modifié si l'on supprime "strictement" ?

Exercice 1.5 (Graphe complet). Le graphe complet K_n^* est le graphe orienté à n sommets tel que pour tout sommet x et tout sommet $y \neq x$, il existe un arc de x vers y . Combien K_n^* a-t-il d'arcs ? Pour chaque sommet x , calculer le nombre de successeurs de x , noté $d^+(x)$, et le nombre de prédécesseurs de x , noté $d^-(x)$. Quelles longueurs peuvent prendre les chemins élémentaires¹ de K_n^* ? Représenter K_3^* , K_4^* , K_5^* .

Exercice 1.6 (Représentations d'un graphe orienté). Donner trois représentations en machine du graphe orienté ci-dessous.



Exercice 1.7 (Graphes de De Bruijn). Dessinez le graphe orienté $G = (S, A)$ suivant : S est l'ensemble des suites binaires de longueur 3 (000, 001, etc.), et il y a un arc de la suite abc vers la suite $a'b'c'$ si les deux dernières lettres de abc coïncident avec les deux premières de $a'b'c'$, i.e. si $b = a'$ et $c = b'$.

Exercice 1.8 (Graphe de Petersen). On considère le graphe non orienté $G = (S, A)$, où S est l'ensemble des paires d'éléments de l'ensemble $\{a, b, c, d, e\}$, et où deux sommets sont adjacents si et seulement si les deux paires correspondantes sont disjointes. Dessinez ce graphe.

Exercice 1.9 (Matrice d'adjacence). La matrice d'adjacence $M = (m_{ij})$ du graphe orienté $G = (S, A)$ à n sommets $\{s_i\}_{i=1, \dots, n}$ est la matrice à n lignes et n colonnes définie par

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (s_i, s_j) \in A, \\ 0, & \text{si } (s_i, s_j) \notin A. \end{cases}$$

Représenter le graphe orienté ayant pour matrice d'adjacence la matrice

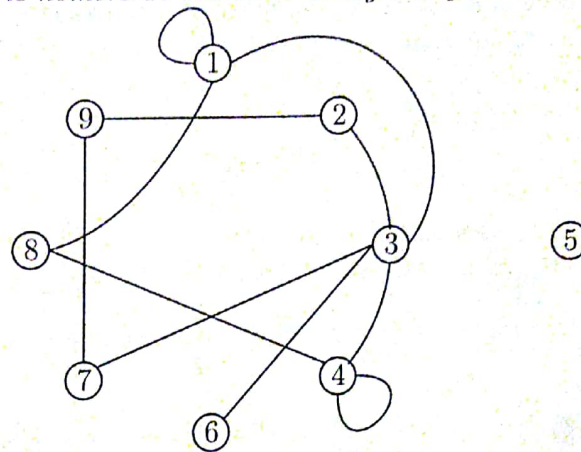
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $M^{(2)}$, matrice obtenue en utilisant la somme et le produit usuels. Calculer $M^{[2]}$, matrice obtenue en utilisant la somme et le produit booléens. Interpréter.

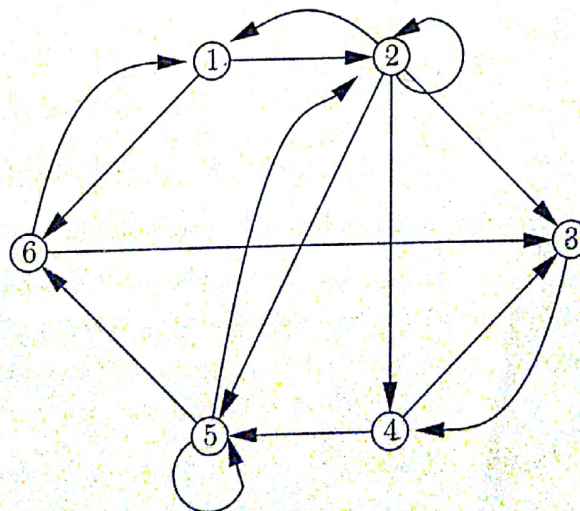
1. Un chemin est dit *élémentaire* s'il ne passe pas deux fois par le même sommet (à l'exception de l'origine et l'extrémité pour un circuit).

Exercice 1.10 (Graphe non orienté, matrice d'incidence, matrice d'adjacence). On définit la matrice d'incidence d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ à n sommets et m arêtes comme la matrice $B = (b_{ij})$ à n lignes et m colonnes, où b_{ij} est égal au nombre de fois où le sommet x_i est incident à l'arête a_j (deux fois, par convention, si a_j a ses deux extrémités égales à x_i).

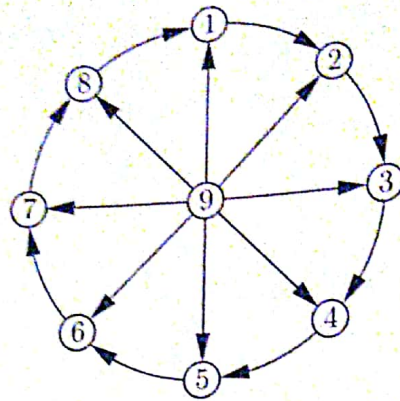
1. Écrire la matrice d'incidence du graphe ci-dessous. Que vaut la somme des éléments d'une ligne ? d'une colonne ?
2. Écrire la matrice d'adjacence du graphe ci-dessous. Que vaut la somme des éléments d'une ligne ? d'une colonne ?
3. Prouver que la somme des degrés d'un graphe non orienté est égal à deux fois le nombre d'arêtes. En déduire le nombre de sommets de degré impair et pair.



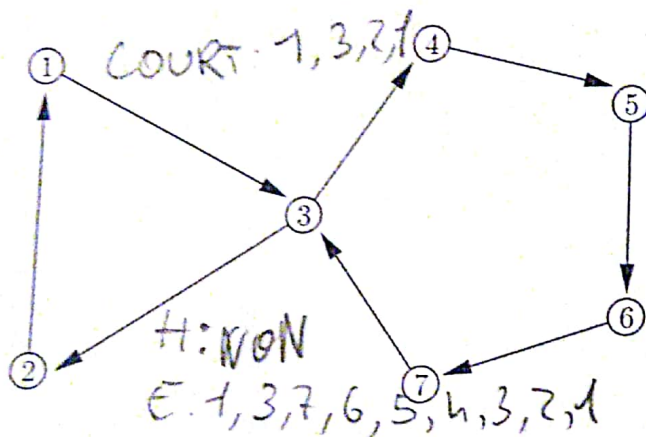
Exercice 1.11 (Poignées de mains, circuit hamiltonien et forte connexité). Pour chaque sommet x du graphe orienté ci-dessous, noté $G = (S, A)$, énumérer $N^+(x)$ (resp. $N^-(x)$), ensemble des successeurs (resp. prédécesseurs) de x , ainsi que $d^+(x)$ (resp. $d^-(x)$). Que remarque-t-on ? Le graphe orienté contient-il un circuit hamiltonien ? Est-il fortement connexe ?



Exercice 1.12 (Sous-graphe, graphe partiel...). Pour le graphe orienté ci-dessous, déterminer le sous-graphe induit par les sommets $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et le graphe partiel (ou sous-graphe couvrant) engendré par les arcs dont l'origine et l'extrémité sont des sommets d'indice impair.



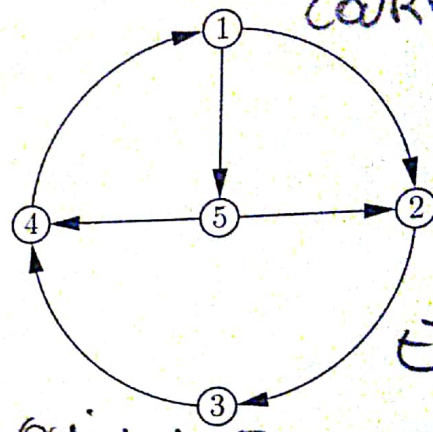
Exercice 1.13 (Circuit hamiltonien). Les graphes orientés ci-dessous admettent-ils un circuit hamiltonien ? Admettent-ils un plus court circuit ? Si oui, le(s)quel(s) ?



COURT: 1, 3, 2, 1

H: NON

E: 1, 3, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1



COURT: 1, 5, 4, 1

E: NON

H: OUI: 1, 5, 2, 3, 4, 1

Exercice 1.14 (Matrice d'adjacence, forte connexité).

1. Représenter le graphe orienté G_0 ayant pour matrice d'adjacence la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utiliser l'algorithme suivant qui permet de trouver la composante fortement connexe du sommet s_0 pour déterminer toutes les composantes fortement connexes de G :

INITIALISATION :

Marquer s_0 du signe (+)

$X^+ = \{s_0\}$ et $Y^+ = S \setminus X^+$;

Marquer s_0 du signe (-)

$X^- = \{s_0\}$ et $Y^- = S \setminus X^-$;

Initialisation de l'ensemble mesurant la stabilisation du processus

$Z = \emptyset$;

Itération jusqu'à stabilisation du processus

TANT QUE $X^+ \cup X^- \neq Z$:

Mise à jour de l'ensemble mesurant la stabilisation du processus

$Z = X^+ \cup X^-$;

Marquer du signe (+) tout successeur non encore marqué (+) d'un sommet marqué (+)

$X^+ = X^+ \cup (Y^+ \cap N^+(X^+))$;

$Y^+ = S \setminus X^+$;

Marquer du signe (-) tout prédécesseur non encore marqué (-) d'un sommet marqué (-)

$X^- = X^- \cup (Y^- \cap N^-(X^-))$;

$Y^- = S \setminus X^-$;

FIN (TANT QUE)

Les sommets marqués (+) et (-) constituent la composante fortement connexe de s_0

LES ELEMENTS DE $X^+ \cap X^-$ CONSTITUENT UNE COMPOSANTE FORTEMENT CONNEXE.

2. Soit $G_R = (S_R, A_R)$ le graphe orienté réduit du graphe orienté $G = (S, A)$ défini comme suit :

- les sommets de G_R sont les composantes fortement connexes de G ;
- étant donnés deux sommets C_i et C_j de S_R , $(C_i, C_j) \in A_R$ si, et seulement si, il existe s_i dans C_i et s_j dans C_j tels que $(s_i, s_j) \in A$.

Tracer le graphe orienté réduit de G_0 . Peut-il exister un circuit dans un graphe orienté réduit ?

Exercice 1.15 (Forte connexité). Démontrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- $G = (S, A)$ est fortement connexe ;
- $\forall X \subset S, X \neq S, X \neq \emptyset : N^+(X) \not\subset X$.

Pour rappel, $N^+(s)$ désigne l'ensemble des successeurs du sommet s de S et, pour tout sous-ensemble X de S , $N^+(X) = \cup_{s \in S} N^+(s)$.

Exercice 1.16 (Graphe orienté simple). Quel est le nombre maximum d'arcs que peut contenir un graphe orienté à n sommets ? un graphe orienté sans boucle ? Même question pour le nombre d'arêtes d'un graphe non orienté avec et sans boucles.

Exercice 1.17 (Représentation d'un graphe). Dessiner les graphes non orientés suivants :

1. Les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.
2. Les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux éléments distincts de $\{1, 2, 3, 4\}$; deux sommets distincts sont reliés si leur intersection est non vide.

Que peut-on dire de ces deux graphes ?

Exercice 1.18 (Représentation d'un graphe). On définit les graphes G_1 et G_2 par leurs matrices d'adjacence M_1 et M_2 :

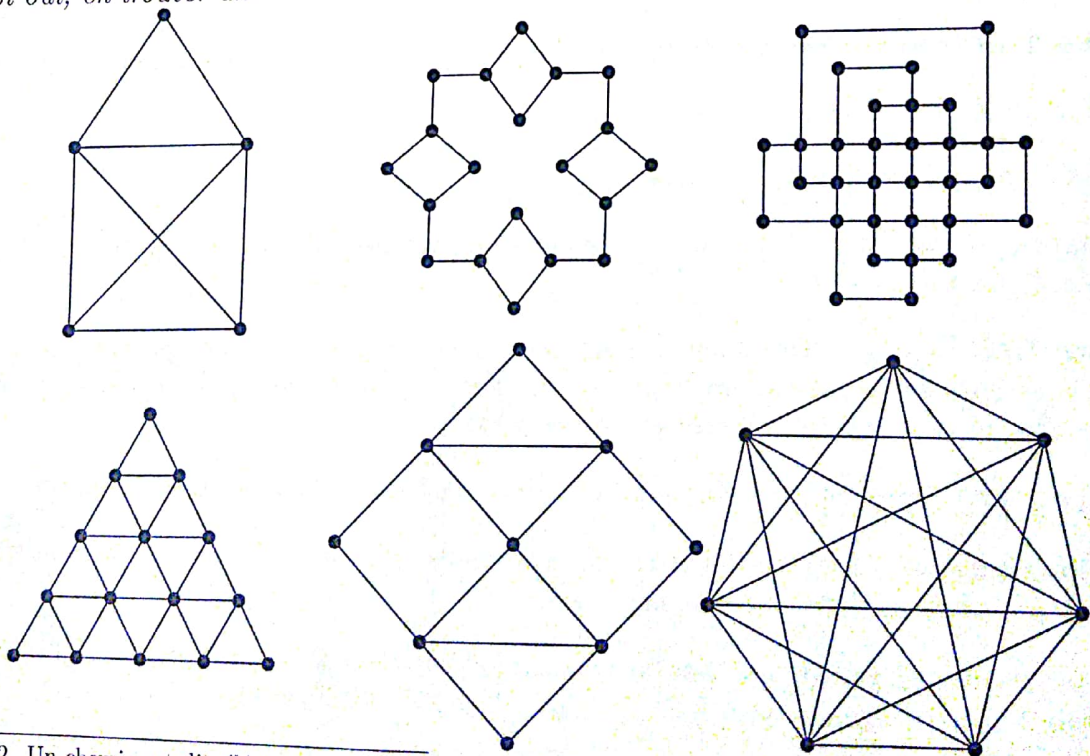
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Les graphes G_1 et G_2 possèdent-ils des boucles ?
2. Calculer les degrés entrant et sortant des deux graphes à partir de la matrice d'adjacence.
3. Donner une représentation sagittale des deux graphes.

Exercice 1.19 (Représentation d'un graphe). On considère le graphe G de sommets $S = \{1, 2, 3, 4\}$ et d'arcs $A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$.

1. Donner pour tout sommet s de G , l'ensemble $N^+(s)$ des successeurs du sommet s et l'ensemble $N^-(s)$ des antécédents de s . Pour tout sommet s , calculer le degré sortant $d^+(s)$ et le degré entrant $d^-(s)$.
2. Écrire la matrice d'adjacence de G . Retrouver les degrés de chaque sommet.
3. Quel est le sous-graphe induit G' de G de sommets $S' = \{1, 2, 3\}$? Comment obtenir la matrice d'adjacence de G' à partir de celle de G ?
4. Donner tous les chemins élémentaires² de 1 à 4.
5. Le graphe G contient-il des boucles ? des circuits ?

Exercice 1.20 (Propriétés eulériennes). Les graphes suivants admettent-ils un cycle eulérien ? Si oui, en trouver un.



2. Un chemin est dit *élémentaire* s'il ne passe pas deux fois par le même sommet (à l'exception de l'origine et l'extrémité pour un circuit).

Exercice 1.21 (Comment trouver un digicode inconnu en frappant un nombre minimum de touches?). Cet exercice donne une solution dans le cas d'un clavier à deux touches (0 et 1). On va construire un graphe orienté dont les chemins représentent les suites de 0 et de 1, chaque arc correspondant à la frappe d'une touche.

I. Digicode à $n = 2$ touches (0 ou 1) constitué de $p = 3$ caractères.

(a) Construire un graphe orienté $G = (S, A)$ où $S = \{(00), (01), (10), (11)\}$, dans lequel il y a un arc de (x, y) vers (x', y') si et seulement si $x' = y$. L'arc de (x, y) à (y, y') sera appelé xyy' . Si (x_1, x_2, \dots, x_N) est une suite de 0 et de 1, vérifier que les sommets $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \dots, (x_{N-1}, x_N)$ définissent un chemin dans G et préciser les arcs de ce chemin. Inversement, vérifier que tout chemin correspond à une suite de 0 et de 1. Si le chemin est de longueur N , quelle est la longueur de la suite ?

(b) Trouver dans G un circuit eulérien.

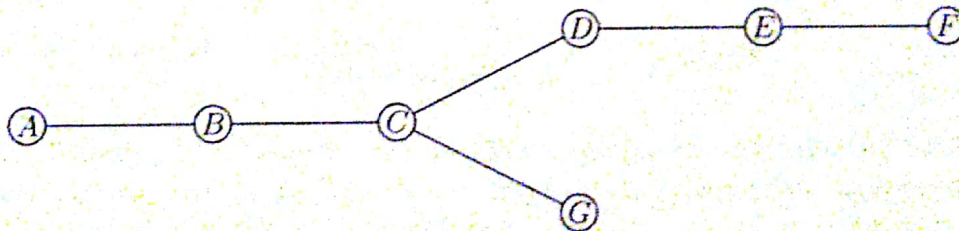
(c) On cherche une suite de 0 et de 1 dans laquelle chaque suite de 3 caractères (par exemple 000, 111, 101, etc.) apparaît exactement une fois. Que doit vérifier le chemin associé à cette suite ? En déduire une suite de longueur minimale ayant cette propriété, et préciser sa longueur.

II. Digicode à $n = 2$ touches (0 ou 1) constitué de $p = 4$ caractères. Par une méthode analogue, trouver une suite de 0 et de 1, de longueur minimale, dans laquelle chaque suite de 4 caractères apparaît exactement une fois (on pourra remplacer S par un ensemble à 8 éléments bien choisis).

III. Généraliser la méthode pour un digicode à n touches constitué de p caractères. Quel est le nombre minimum de touches qu'il faut frapper pour trouver le digicode ? Application : $n = 10$ et $p = 4$.

2 Arbres

Exercice 2.1 (Arbres enracinés). Représenter toutes les manières possibles d'enraciner l'arbre suivant :



Exercice 2.2 (Arbre lexicographique). Représenter l'arborescence appelée arbre lexicographique du lexique "lime, lire, lis, lise, lit, loi, loir, mur".

Exercice 2.3 (Arborescence). Représenter l'arborescence du tournoi de tennis entre deux joueurs, où le vainqueur est le premier qui gagne 2 matchs consécutifs ou 3 matchs au total. Décrire les différentes possibilités.

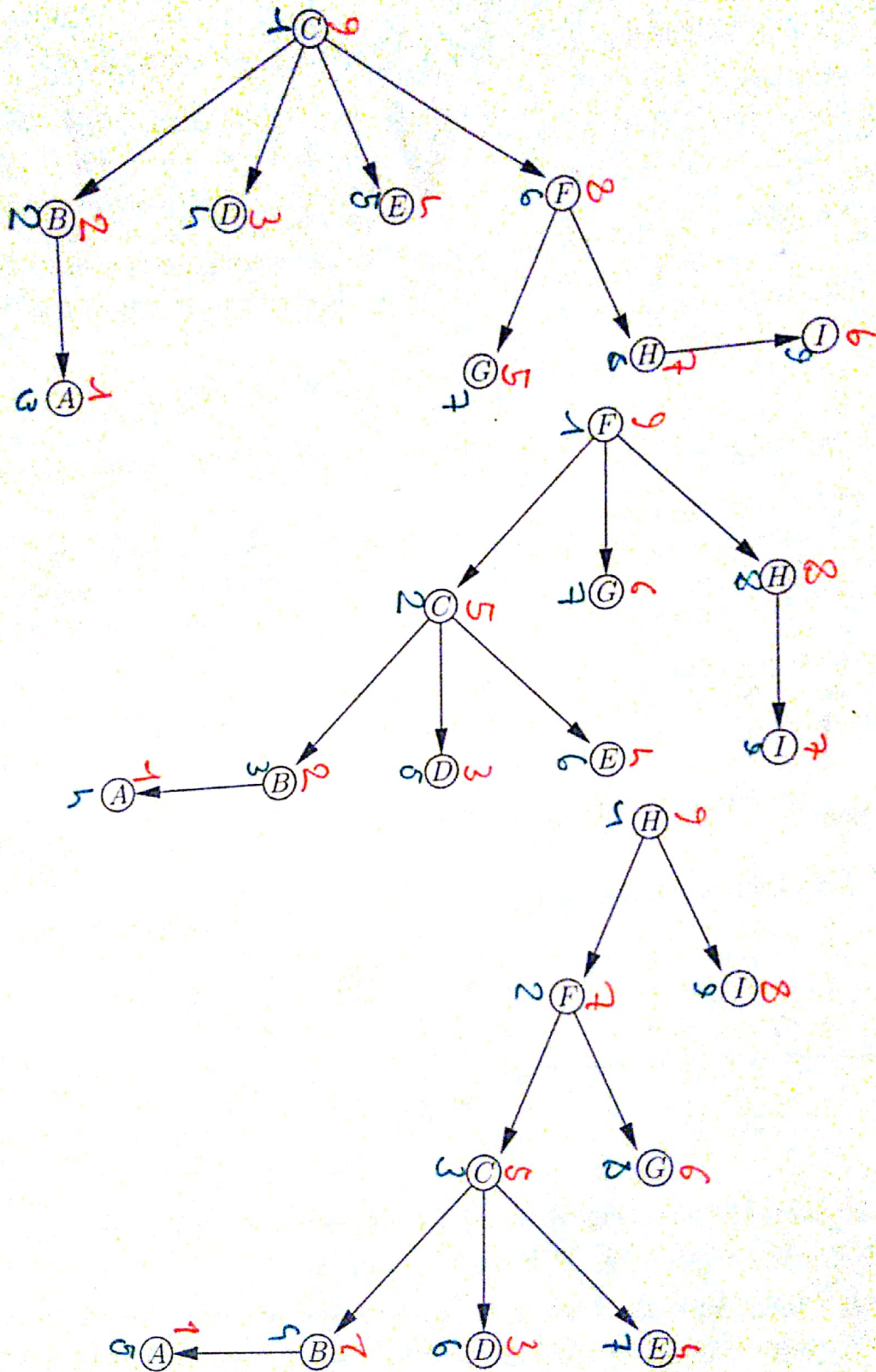
Exercice 2.4 (Arborescence et numérotation préfixée ou postfixée). Représenter l'arborescence associée à l'expression algébrique

$$((a + b) \times c) + ((a + b) \times (c + d \times (e + f))).$$

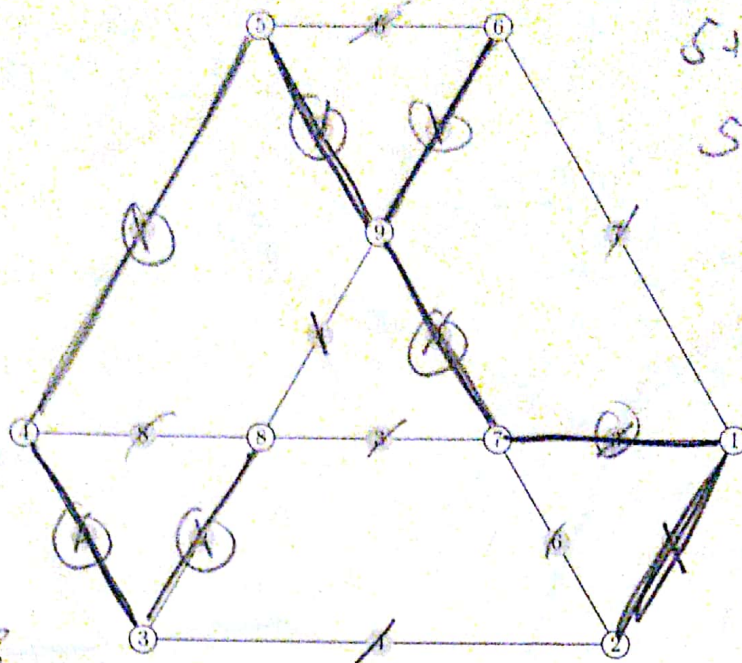
Donner les parcours préfixé et postfixé.

Exercice 2.5 (Numérotations préfixée et postfixée). Déterminer les numérotations préfixée et postfixée des arbres suivants, en adoptant la convention du « plus petit choix possible (par ordre alphabétique) » en cas de possibilités multiples.

xe
fixé



Exercice 2.6 (Algorithme de Kruskal). Mettre en œuvre l'algorithme de Kruskal sur le graphe ci-dessous :

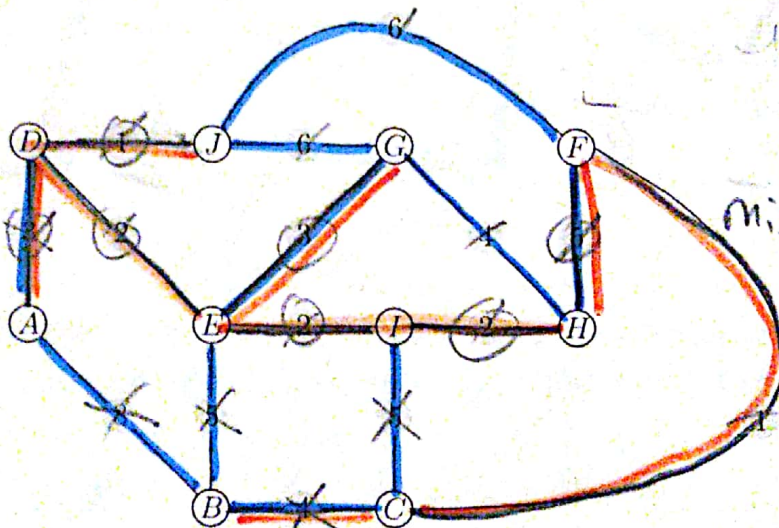


$$5 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2$$

$$5 + 5 + 3 + 5$$

$$18$$

Exercice 2.7 (Algorithme de Kruskal). Soit G le graphe défini ci-dessous :



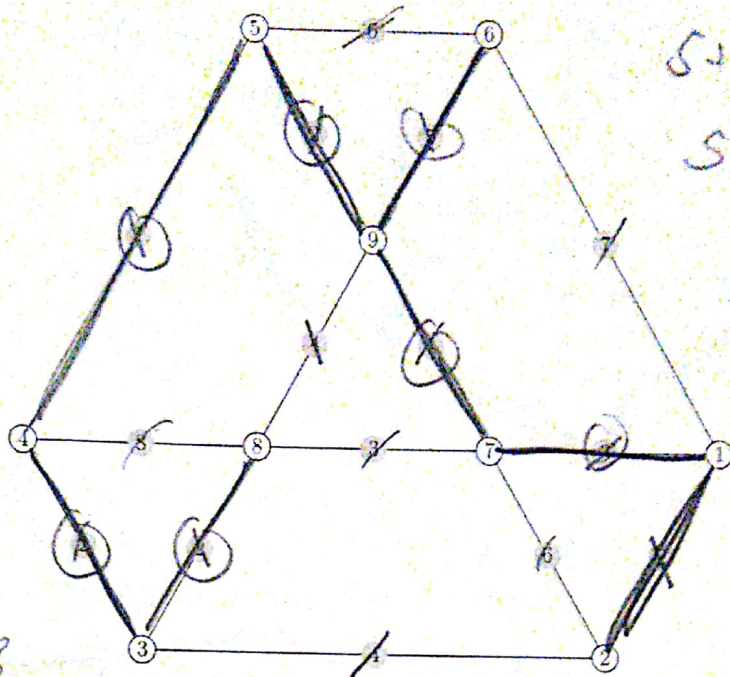
min: 3
max: 44

On considère le graphe non orienté suivant. Déterminer par l'algorithme de Kruskal l'arbre couvrant de poids minimal de G associé à la méthode du « plus petit choix possible » : on nommera une arête en utilisant l'ordre alphabétique des sommets³ et on classera les arêtes par ordre alphabétique avec priorité dans l'ordre lexicographique⁴ lorsque des arêtes ont le même poids. On listera précisément les arêtes qui seront retenues et on dessinera l'arbre couvrant de poids minimal.

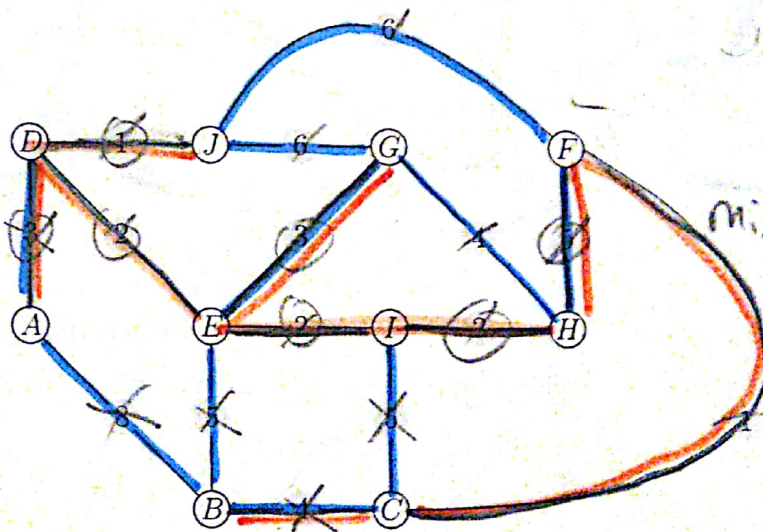
De même, déterminer par l'algorithme de Kruskal l'arbre couvrant de poids maximal de G associé à la méthode du « plus petit choix possible ».

Exercice 2.8 (Algorithme de Kruskal). Déterminer l'arbre couvrant de poids minimal associé au graphe suivant. Idem pour l'arbre couvrant de poids maximal.

3. Par exemple, on écrira (AB) et non (BA) .
4. Par exemple, pour classer les arêtes de même poids (FH) et (CI) , on choisira d'abord (CI) , puis (FH) ; pour classer (ED) et (EI) (qui ont la même première lettre), on choisira d'abord (ED) puis (EI) .



Exercice 2.7 (Algorithme de Kruskal). Soit G le graphe défini ci-dessous :



On considère le graphe non orienté suivant. Déterminer par l'algorithme de Kruskal l'arbre couvrant de poids minimal de G associé à la méthode du « plus petit choix possible » : on nommera une arête en utilisant l'ordre alphabétique des sommets³ et on classera les arêtes par ordre alphabétique avec priorité dans l'ordre lexicographique⁴ lorsque des arêtes ont le même poids. On listera précisément les arêtes qui seront retenues et on dessinera l'arbre couvrant de poids minimal.

De même, déterminer par l'algorithme de Kruskal l'arbre couvrant de poids maximal de G associé à la méthode du « plus petit choix possible ».

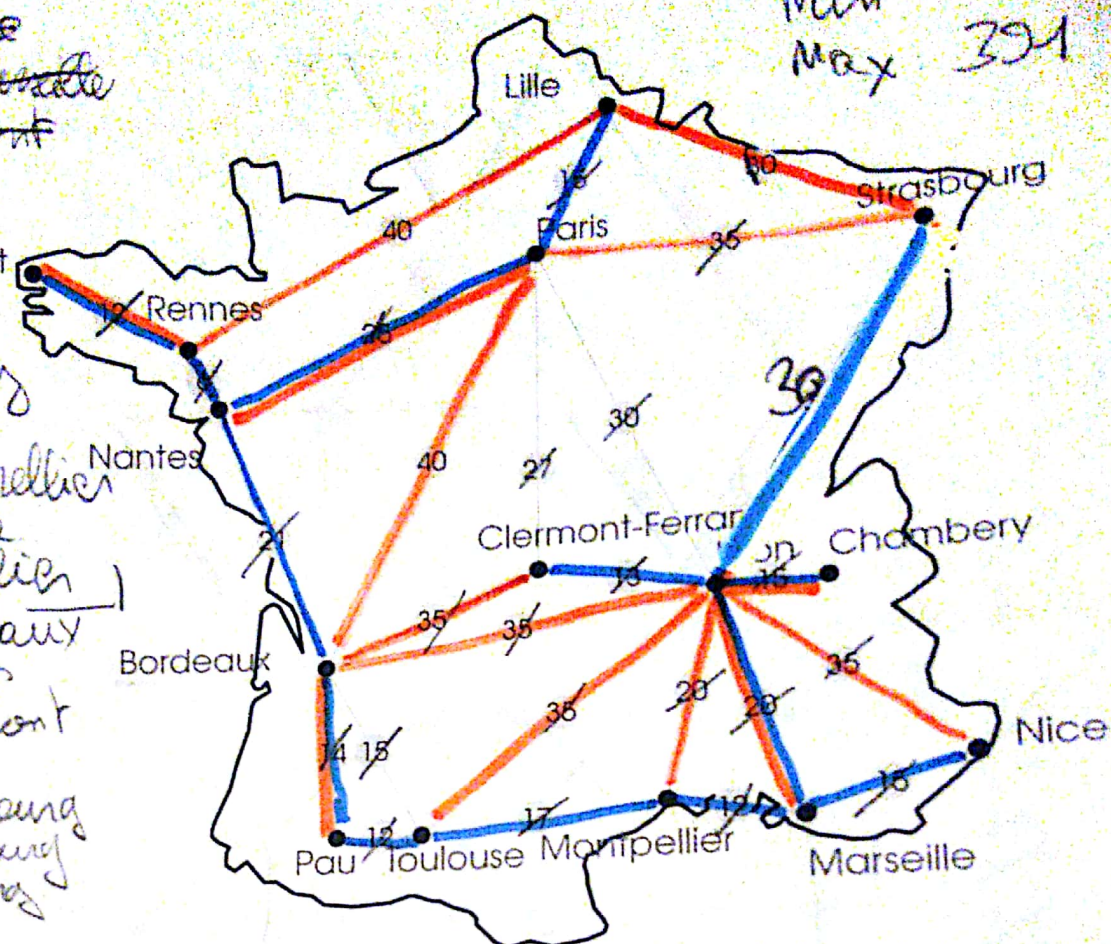
Exercice 2.8 (Algorithme de Kruskal). Déterminer l'arbre couvrant de poids minimal associé au graphe suivant. Idem pour l'arbre couvrant de poids maximal.

3. Par exemple, on écrira (AB) et non (BA) .

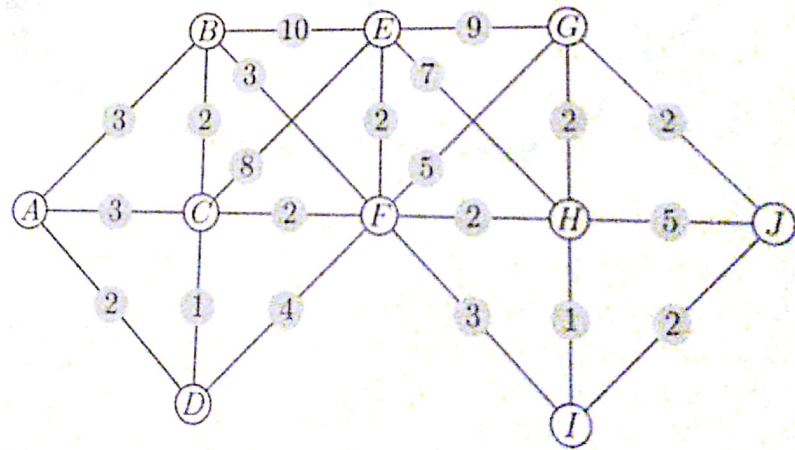
4. Par exemple, pour classer les arêtes de même poids (FH) et (CI) , on choisira d'abord (CI) , puis (FH) ; pour classer (ED) et (EI) (qui ont la même première lettre), on choisira d'abord (ED) puis (EI) .

~~Rennes - Nantes~~
~~Brest - Rennes~~
~~Pau - Toulouse~~
~~Montpellier - Marseille~~
~~Lyon - Clermont~~
~~Bordeaux - Pau~~
~~Bordeaux - Toulouse~~
~~Marseille - Nice~~
~~Lyon - Chambéry~~
~~Lille - Paris~~
~~Toulouse - Montpellier~~
~~Lyon - Marseille~~
~~Lyon - Montpellier~~
~~Nantes - Bordeaux~~
~~Paris - Nantes~~
~~Paris - Clermont~~
~~Lyon - Pau~~
~~Lyon - Strasbourg~~
~~Lille - Strasbourg~~
~~Lyon - Marseille~~
~~Lyon - Bordeaux~~
~~Clermont - Bordeaux~~
~~Lille - Rennes~~

Min: 227
 Max: 391



Exercice 2.9 (Arbre couvrant de poids minimal). On considère le graphe ci-dessous :



1. Déterminer un arbre couvrant de poids minimal. Est-il unique ?
2. L'arbre obtenu à la question précédente fournit un unique chemin du sommet A vers tout autre sommet. Ces chemins sont-ils des plus courts chemins ?

Exercice 2.10 (Arbre couvrant de poids minimal). Appliquer l'algorithme de Kruskal au graphe

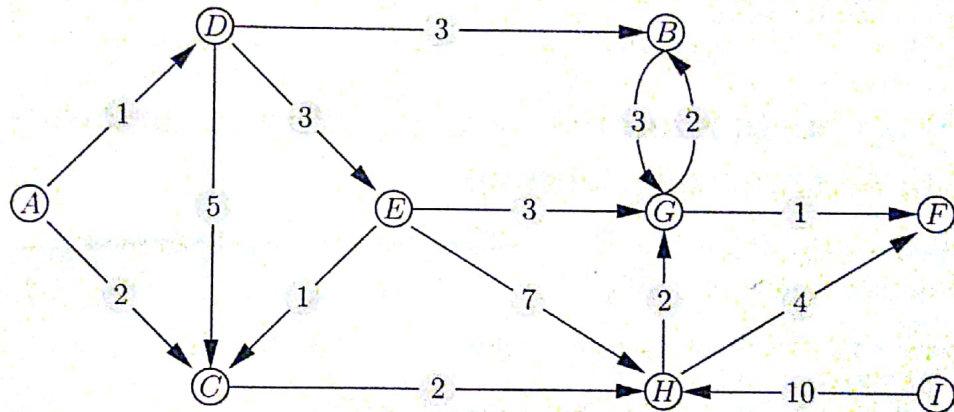
associé à la matrice de valuation

$$\begin{pmatrix} +\infty & 12 & 9 & 5 & 7 & 6 \\ 12 & +\infty & 1 & 14 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & +\infty & 8 & 15 & 3 \\ 5 & 14 & 8 & +\infty & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 15 & 4 & +\infty & 13 \\ 6 & 11 & 3 & 2 & 13 & +\infty \end{pmatrix}$$

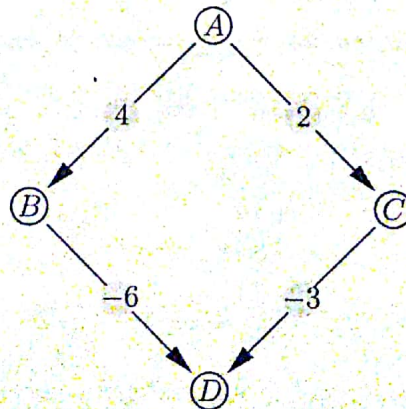
3 Plus courts chemins dans les graphes orientés valués : l'algorithme de Dijkstra

Exercice 3.1 (Algorithme de Dijkstra).

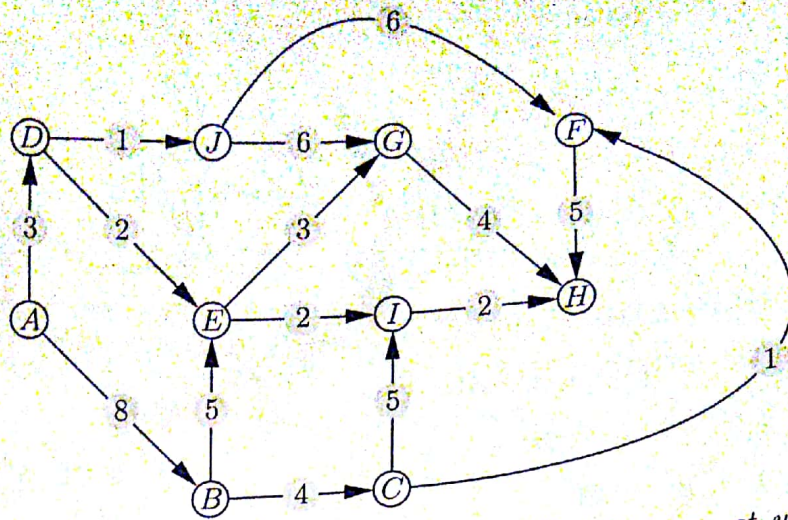
- Déterminer en utilisant l'algorithme de Dijkstra les plus courts chemins du sommet A vers tous les autres sommets dans le graphe G ci-dessous.



- Vérifier que l'algorithme de Dijkstra donne un résultat erroné pour le graphe G' ci-dessous :



Exercice 3.2 (Algorithme de Dijkstra). Soit G le graphe défini ci-dessous :



Mettre en œuvre l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la distance et un plus court chemin entre le sommet A et tout autre sommet. Au préalable, on justifiera l'utilisation de cet algorithme.

4 Plus courts chemins dans les graphes orientés valués : l'algorithme de Bellman

Exercice 4.1 (Algorithme de tri topologique). Pour décomposer en niveaux un graphe G on peut utiliser l'algorithme suivant :

Algorithme 4.1 (Décomposition en niveaux).

INITIALISATION :

n = nombre de sommets du graphe ;
rang = matrice nulle de taille $1 \times n$;
degre = matrice de taille $1 \times n$ contenant les degres entrants $d^-(x)$;
 $X = \emptyset$;

TANT QUE $X \neq S$:

L = liste des sommets de $S \setminus X$ de degré entrant nul ;

POUR TOUT $x \in L$:

POUR TOUT y successeur de x dans G :

SI $\text{rang}(y) < \text{rang}(x) + 1$, ALORS $\text{rang}(y) = \text{rang}(x) + 1$;

degre(y) = degre(y) - 1 ; \rightarrow élimination de l'arc (x, y)

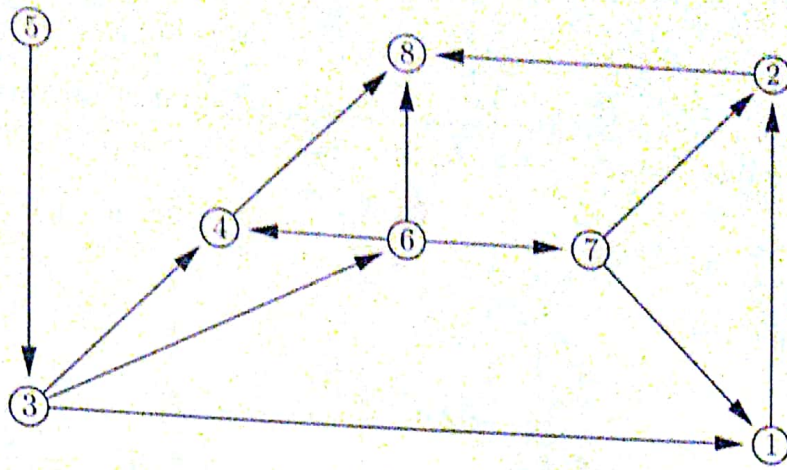
FIN (POUR)

FIN (POUR)

$X = X \cup L$;

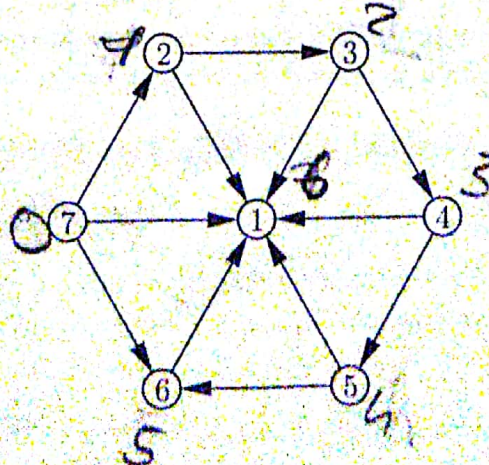
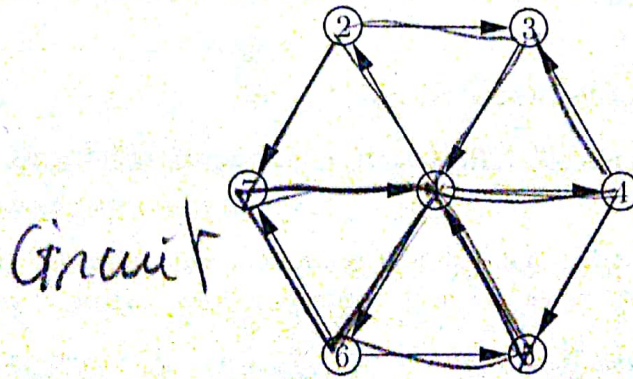
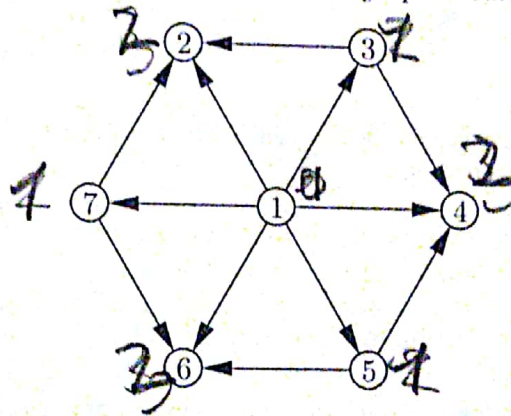
FIN (TANT QUE)

Cet algorithme est utile en prélude à la recherche des chemins les plus courts dans un graphe sans circuit afin d'utiliser l'algorithme de Bellman. Décomposer en niveaux le graphe orienté sans circuit ci-dessous, à l'aide de l'algorithme de décomposition en niveaux. Re-dessiner le graphe en mettant en évidence les niveaux.



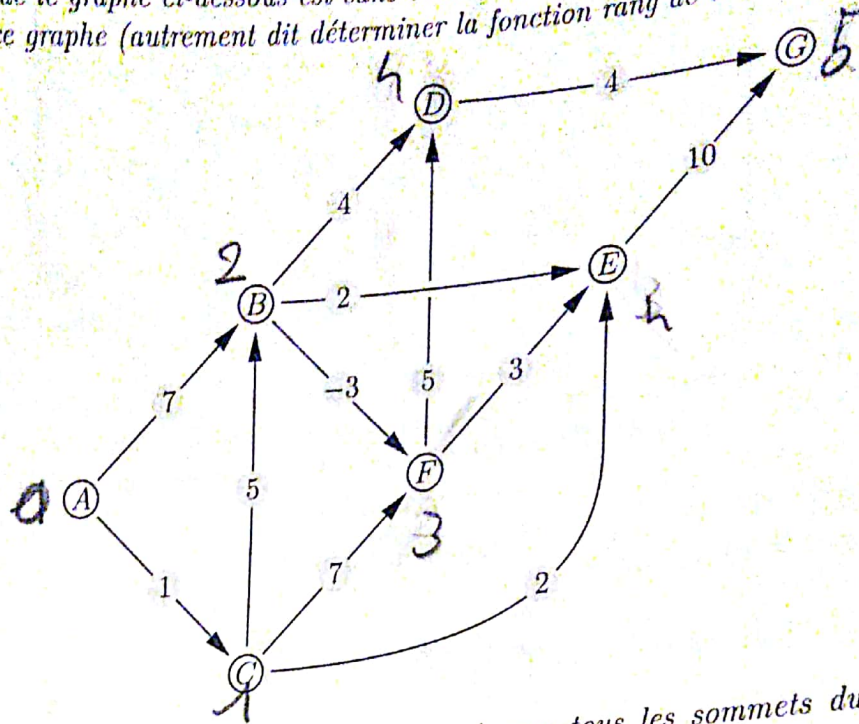
2 Dans la suite, l'algorithme défini dans l'Exercice 4.1 ne sera pas nécessaire pour déterminer la numérotation topologique d'un graphe sans circuit : les graphes que nous considérerons étant de taille modeste, nous nous efforcerons, si nécessaire, de déterminer leur tri topologique à la main.

Exercice 4.2 (Tri topologique). Déterminer, en recherchant le niveau (ou rang) de chaque sommet, quels sont les graphes sans circuit parmi les graphes suivants :



Exercice 4.3 (Algorithme de Bellman).

- Vérifier que le graphe ci-dessous est sans circuits. Déterminer une numérotation topologique de ce graphe (autrement dit déterminer la fonction rang de ce graphe).



- Déterminer un plus court chemin du sommet A vers tous les sommets du graphe en utilisant l'algorithme de Bellman.

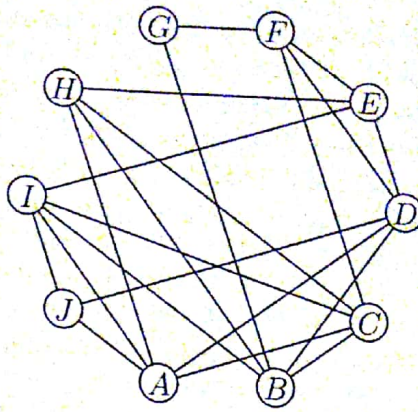
Exercice 4.4 (Algorithme de Bellman). Déterminer un plus long chemin entre le sommet A et tous les autres sommets du graphe de l'Exercice 4.3.

Exercice 4.5 (Algorithme de Bellman). Un routier veut aller de la ville A à la ville J en utilisant exclusivement les routes du réseau passant les villes A, B, C, D, E, F, G, H, I, J et modélisé par un graphe orienté valué dont la représentation en machine consiste en trois tableaux T_1, T_2, T_3 :

- $T_1 = [3, 2, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 1, 0]$ contient $d^+(A), d^+(B)$ etc.
- $T_2 = [B, C, D, C, E, D, E, F, F, G, I, F, H, H, H, I, J, J]$ contient les successeurs de A, de B etc.
- $T_3 = [4, 1, 3, 1, 3, 1, 7, 6, 2, 3, 2, 1, 2, 4, 4, 5, 1, 2]$ contient la valuation des arcs décrits dans T_2 , correspondant à la distance en kilomètres entre les villes origine et extrémité.

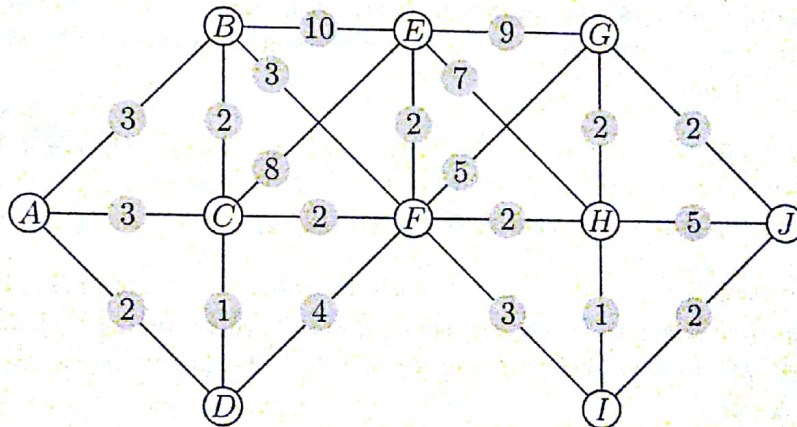
- Dessiner le graphe ainsi défini.
- Quel itinéraire le routier doit-il emprunter pour faire le plus court trajet possible ? Comment est modifié le problème si le routier désire se rendre de A à F ?

Exercice 4.6 (Plus court(s) chemin(s)). Dans le graphe ci-dessous, trouver tous les plus courts chemins entre A et G.



Exercice 4.7 (Réseau informatique). Le réseau informatique d'une entreprise est représenté par le graphe qui suit. Les sommets représentent les serveurs et les arêtes indiquent le temps nécessaire pour faire passer une information d'un ordinateur à l'autre.

1. Un employé travaillant sur l'ordinateur A envoie un document à un collègue utilisant l'ordinateur J. Combien de temps faudra-t-il au minimum pour que le document lui parvienne ?
2. Le serveur F tombe subitement en panne. Combien de temps faut-il maintenant pour envoyer un document de A à J ?



Exercice 4.8 (Plus court(s) chemin(s)). La matrice suivante donne en heures les durées des vols entre certaines villes v_1, v_2, \dots, v_6 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & \infty \\ \infty & 4 & 0 & \infty & 4 & 3 \\ 6 & 2 & \infty & 0 & 4 & 4 \\ \infty & 4 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Que signifient les entrées ∞ dans la matrice de valuation ?
2. Quel est l'itinéraire le plus rapide de v_1 à v_6 ?
3. On suppose maintenant qu'il y a une escale obligatoire de respectivement 2, 3, 1, 1, 4, 5 heures aux villes v_1, v_2, \dots, v_6 . Quel est alors l'itinéraire le plus rapide de v_1 à v_6 ?

Exercice 4.9 (Kaamelott). La Dame du Lac est apparue à Arthur Pendragon, roi de Bretagne, et lui a indiqué l'existence d'un parchemin qui contient des informations sur le Graal; le parchemin se trouve dans une grotte gardée par le Dragon d'Airain et localisée près d'un poste avancé du royaume. Depuis son château de Kaamelott et pour accéder à ce parchemin, Arthur a la possibilité de s'adjoindre les services de certains de ses chevaliers et de recourir aux sortilèges fabriqués par les druides du royaume pour vaincre le dragon. Il peut accomplir les actions suivantes :

- depuis le château de Kaamelott, aller à la taverne où les chevaliers Karadoc et Perceval organisent un tournoi de Cul-de-chouette (avec les règles du Pays de Galles) : 1 jour.
- depuis le château de Kaamelott, se rendre auprès de la reine Guenièvre, partie à la rencontre des paysans du royaume, pour lui demander où se trouve actuellement Lancelot du Lac : 1 jour.
- en dépit des informations obtenues auprès de Guenièvre, rejoindre la taverne : 2 jours.
- à partir des informations obtenues auprès de Guenièvre, rejoindre Lancelot du Lac : 3 jours.
- depuis la taverne, rejoindre Lancelot du Lac sur la base des informations nécessairement foireuses de Karadoc et Perceval : 20 jours.
- depuis la taverne, rejoindre la Carmélide pour faire une halte sur les terres de Léodagan, dit le Sanguinaire, et Dame Séli afin de leur demander des informations sur la localisation de Lancelot : 2 jours.
- en Carmélide, négocier avec Léodagan l'information sur la localisation de Lancelot contre une promesse de construction de catapultes et, sur cette base, rejoindre Lancelot : 2 jours (dont une journée entière de négociations houleuses).
- après avoir trouvé Lancelot du Lac, se rendre au refuge du druide Élias afin d'y obtenir un sort permettant de vaincre le dragon (le sort d'immobilisation permettant à Lancelot de figer le dragon pendant qu'Arthur plantera son épée Excalibur entre les yeux du dragon) : 4 jours.
- après avoir trouvé Lancelot du Lac, se rendre au refuge de Merlin l'enchanteur afin d'y obtenir un sort permettant de vaincre le dragon (le sort du crâne ancestral (?), dont Merlin ne veut pas donner de détail car il est vexé que le roi Arthur puisse solliciter les services d'Élias) : 2 jours.
- après avoir trouvé Lancelot du Lac, se rendre au poste avancé où se trouvent les chevaliers Yvain et Gauvain qui pourront ainsi participer à la quête du parchemin : 7 jours.
- depuis le refuge de Merlin l'enchanteur, dont le sort est d'une efficacité douteuse, se rendre chez son concurrent, le druide Élias : 1 jour.
- depuis le refuge de Merlin, décider de ne pas utiliser le sort et se rendre au poste avancé où se trouvent les chevaliers Yvain et Gauvain : 4 jours.
- depuis le refuge d'Élias, décider de ne pas utiliser le sort d'immobilisation et se rendre au poste avancé où se trouvent les chevaliers Yvain et Gauvain : 2 jours.

- depuis le poste avancé, rejoindre la grotte du dragon et confier à Yvain et Gauvain la mission de tuer le dragon; ils utilisent la technique du calcium, empruntée à Perceval ("J'ai inventé une nouvelle technique de combat : on se bat à moitié à mains nues et à moitié avec du calcium") : 8 jours (dont 4 jours pour les mains nues et 4 jours pour le calcium).
- depuis le poste avancé, accéder directement au parchemin en creusant avec Yvain, Gauvain et Lancelot un tunnel qui débouche directement dans la cachette du parchemin : 10 jours.
- depuis le refuge d'Élias, rejoindre la grotte et tuer le dragon en utilisant le sort concocté par Élias : 3 jours.
- depuis le refuge de Merlin, rejoindre la grotte et tuer le dragon en utilisant le sort probablement foireux fabriqué par Merlin : 30 jours.
- après avoir vaincu le dragon, accéder au parchemin : 0 jour.
- depuis la taverne, se rendre directement à la grotte du dragon, seul, sans faire de halte, ni solliciter les druides et tuer le dragon en utilisant le furet de guerre de Perceval : 50 jours (10 jours de voyages et 40 jours de combat acharné entre le furet de Perceval et le dragon. Note : le furet utilise également la technique du calcium).

Comment le roi Arthur doit-il faire pour récupérer le parchemin le plus vite possible ? Quel temps lui faudra-t-il ?

5 Ordonnancement de projets

Exercice 5.1 (Ordonnancement de projet). La construction d'un pavillon demande la réalisation de tâches énumérées dans le tableau suivant où figurent également les contraintes d'antécédence.

tâche	description	durée en semaines	tâches antérieures
A	maçonnerie	7	—
B	charpente de toiture	3	A
C	toiture	1	B
D	sanitaires et électricité	8	A
E	façade	2	C,D
F	fenêtres	1	C,D
G	aménagement du jardin	1	C,D
H	plafonds, planchers	3	F
I	peinture	2	H
J	emménagement	1	E,G,I

Tracer le graphe potentiels-tâches. Déterminer l'ordonnancement du projet. Donner la date au plus tôt de F. Peut-elle être modifiée sans que la durée du projet soit modifiée ? Donner la date au plus tôt de B. De combien de semaines au maximum peut-elle être retardée sans que la durée du projet soit modifiée ?

Exercice 5.2 (Ordonnancement de projet, DST 2013-14). On s'intéresse à un projet dont le but est de lancer sur le marché un logiciel d'aide au diagnostic médical. Le projet est constitué des tâches suivantes :

TÂCHES	DESCRIPTION	DURÉES	CONTRAINTES
A	Étude de marché	3	\emptyset
B	Recrutement de développeurs	6	\emptyset
C	Groupe de travail	6	\emptyset
D	Réalisation du logiciel	2	B est achevée
E	Communication technique	4	B est achevée
F	Communication commerciale	3	A et D sont achevées

- Déterminer les inégalités associées aux contraintes du projet et en déduire le graphe potentiels-tâches associé (on précisera les contraintes implicites).
- Déterminer l'ordonnancement du projet, c'est-à-dire les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche et la durée minimale du projet.
- Préciser le(s) chemin(s) critique(s).
- Si la date au plus tôt de C est retardée d'une semaine, la durée du projet est-elle modifiée ? De combien de semaines au maximum la date au plus tôt de D peut-elle être retardée sans que la durée du projet ne soit modifiée ?

Exercice 5.3 (Ordonnancement de projet, Rattrapage de DST 2013-14). On s'intéresse à un projet dont le but est de construire un bâtiment. Le projet est constitué des tâches suivantes :

TÂCHES	DESCRIPTION	DURÉES (semaines)	CONTRAINTES
A	Installation du chantier	1	\emptyset
B	Mise en place des clôtures	1	\emptyset
C	Fondations	6	B est achevée
E	Mûrs et toiture	4	B et C sont achevées
F	Aménagements intérieurs	3	E est achevée
G	Aménagements extérieurs	3	B et C sont achevées

- Déterminer les inégalités associées aux contraintes du projet et en déduire le graphe potentiels-tâches associé (on précisera les contraintes implicites).
- Déterminer l'ordonnancement du projet, c'est-à-dire les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche et la durée minimale du projet.
- Préciser le(s) chemin(s) critique(s).
- Quelles tâches peut-on retarder d'une semaine sans modifier la durée du projet ?

Algorithmes

Algorithme 5.1 (Dijkstra). L'algorithme de Dijkstra est un algorithme de recherche de distance et de plus court chemin. Il ne fonctionne que si toutes les valuations des arcs sont positives.

```
INITIALISATION :  
  M = {1} ;  
  d(1) = 0 ;  
  P(1) = ∅ ;  
  POUR i = 2, ..., n :  
    | d(i) = f(1, i) S'IL EXISTE UN ARC DE 1 VERS i ;  
    | d(i) = ∞ SINON ;  
  FIN (POUR)  
TANT QUE M ≠ S :  
  CHOISIR x ∈ S \ M TEL QUE d(x) = min_{i ∈ S \ M} d(i) ;  
  M = M ∪ {x} ;  
  POUR TOUT i ∈ S \ M SUCCESSEUR DE x :  
    | SI d(i) > d(x) + f(x, i), ALORS d(i) = d(x) + f(x, i) ET P(i) = x ;  
  FIN (POUR)  
FIN (TANT QUE)
```

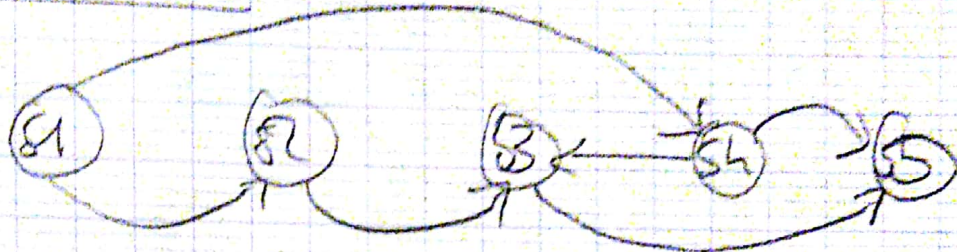
Algorithme 5.2 (Bellman). Dans le cas particulier des graphes sans circuits, l'algorithme de Bellman permet de déterminer les plus courts chemins. L'algorithme utilise néanmoins la numérotation topologique du graphe.

```
INITIALISATION :  
  d(1) = 0 ;  
  P(1) = ∅ ;  
  POUR i = 2, ..., n :  
    | d(i) = +∞ ;  
    | P(i) = ∅ ;  
  FIN (POUR)  
POUR i = 2, ..., n :  
  | d(i) = min_{j ∈ N^{-}(i)} (d(j) + f(j, i)) ;  
  | j0 = prédécesseur de i fournissant la valeur de d(i) ci-dessus ;  
  | P(i) = j0 ;  
FIN (POUR)
```

Algorithme 5.3 (Kruskal). L'algorithme de Kruskal permet de déterminer un arbre couvrant de poids minimum dans un graphe valué donné.

```
INITIALISATION :  
  (a1, ..., am) : LISTE DES ARETES PAR ORDRE CROISSANT DES POIDS ;  
  T0 = ∅ ;  
POUR i = 1, ..., n - 1 :  
  | λi = min({j ∈ N, aj ∉ Ti-1 ET Ti-1 ∪ aj EST ACYCLIQUE}) ;  
  | Ti = Ti-1 ∪ aλi ;  
FIN (POUR)  
RESULTAT : Tn-1 EST UN ARBRE COUVRANT DE POIDS MINIMUM.
```

Exercice 1.9



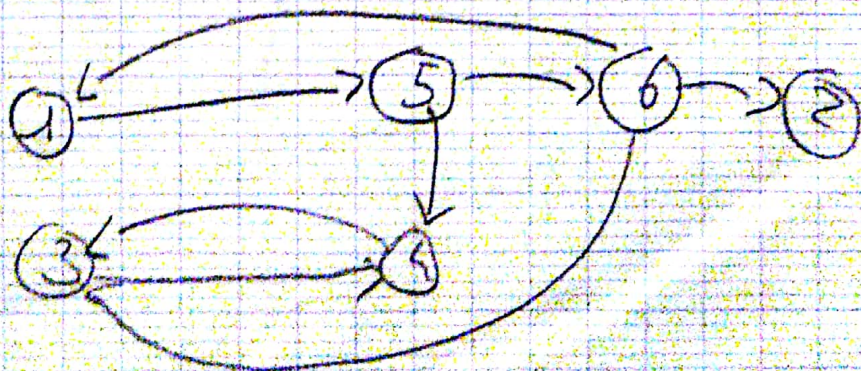
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.14

1)



$$X^+ = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$X^- = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$Z = \emptyset$$

Iteration 1:

$$Z = 1$$

$$X^+ = 1, 5 \quad Y^+ = 2, 3, 4, 6$$

$$X^- = 1, 6 \quad Y^- = 2, 3, 4, 5$$

Iteration 2:

$$Z = 1, 5, 6$$

$$X^+ = 1, 5, 6, 4 \quad Y^+ = 2, 3$$

$$X^- = 1, 5, 6 \quad Y^- = 2, 3, 4$$

Iteration 3:

$$Z = 1, 5, 6, 4$$

$$X^+ = 1, 5, 6, 4, 3 \quad X^+ = \emptyset$$

$$X^- = 1, 5, 6 \quad Y^- = 2, 3, 4$$

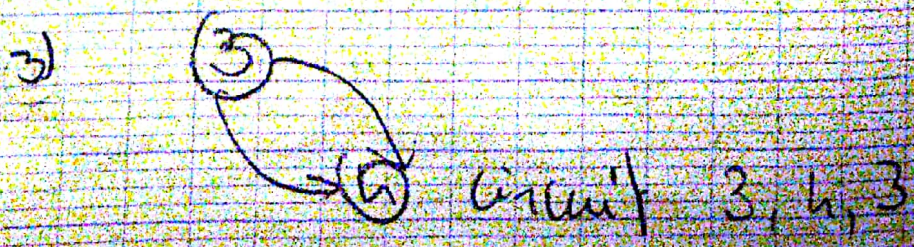
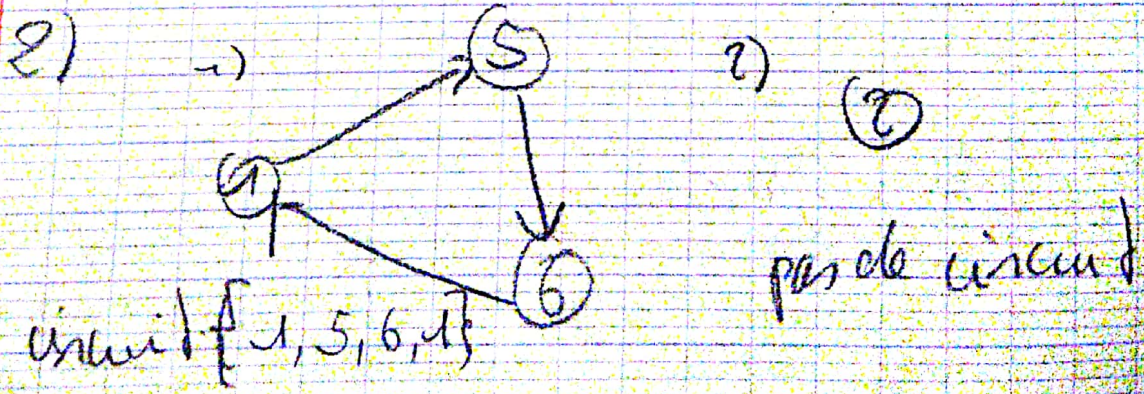
Iteration 4:

$$Z = 1, 5, 6, 4, 2, 3$$

$$X^+ = 1, 5, 6, 4, 2, 3 \quad Y^+ = \emptyset$$

$$X^- = 1, 5, 6 \quad Y^- = 2, 3, 4$$

$$X^+ \cap X^- = \{1, 5, 6\} \quad \text{et} \quad \{3, 4\} \quad \text{et} \quad \{2\}$$

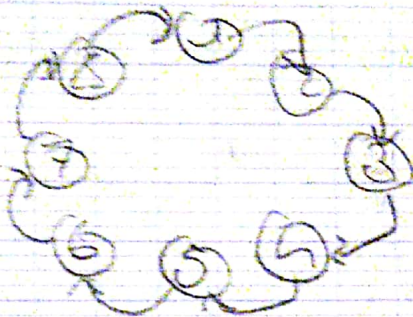


Exercice 11

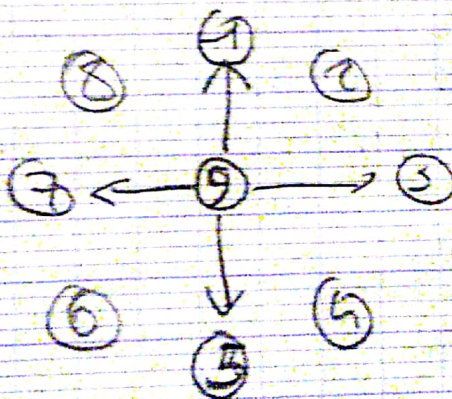
feuille

Exercice 11.1

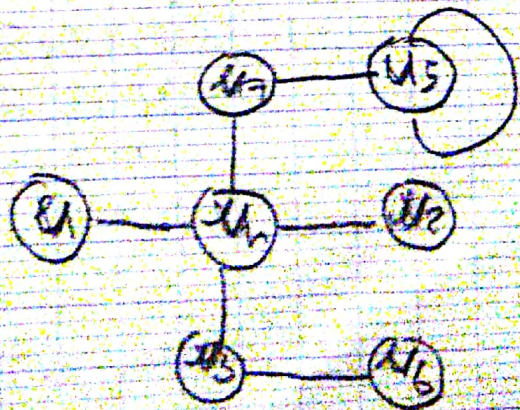
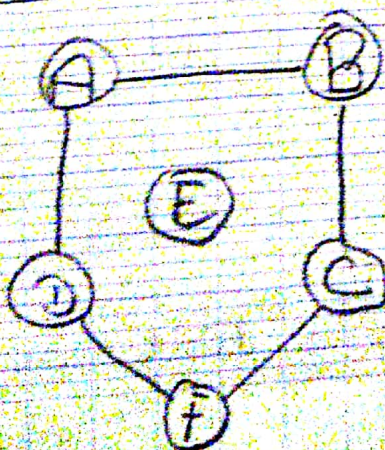
sous-graphe :

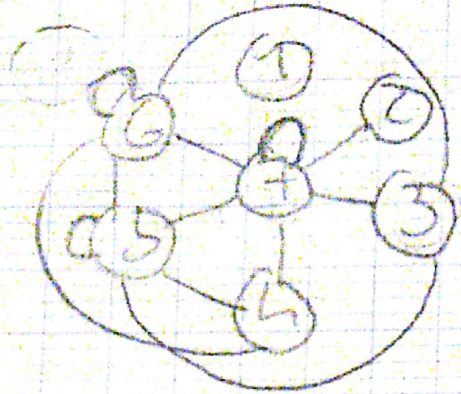


sous-graphe couvrant



Exercice 12





Exercice 1.6)

$G = (6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 4, 2, 5, 1, 5, 5, 1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$d^+(1) = 4$	$+ d^-(1) = 6$	$= d(1) = 5$
$d^+(2) = 1$	$+ d^-(2) = 1$	$= d(2) = 2$
$d^+(3) = 1$	$+ d^-(3) = 0$	$= d(3) = 1$
$d^+(4) = 2$	$+ d^-(4) = 1$	$= d(4) = 3$
$d^+(5) = 2$	$+ d^-(5) = 1$	$= d(5) = 3$
$d^+(6) = 0$	$+ d^-(6) = 0$	$= d(6) = 0$

$N^-(1) = \{5\}, N^-(2) = \{1\}, N^-(3) = \{1\}, N^-(4) = \{1, 4\}$
 $N^-(5) = \{1, 2\}, N^-(6) = \{\emptyset\}$
 $N^+(1) = \{2, 3, 4, 5\}, N^+(2) = \{5\}, N^+(3) = \{\emptyset\}, N^+(4) = \{4\}$
 $N^+(5) = \{1\}, N^+(6) = \{\emptyset\}$

Exercice 1.11

$N^+(1) = \{1, 2\}, N^-(1) = \{2, 6\}, d^+(1) = 2, d^-(1) = 2$
 $N^+(2) = \{1, 3, 4\}, N^-(2) = \{1, 2, 5\}, d^+(2) = 5, d^-(2) = 3$
 $N^+(3) = \{4\}, N^-(3) = \{2, 4, 6\}, d^+(3) = 1, d^-(3) = 3$
 $N^+(4) = \{3, 5\}, N^-(4) = \{2, 3\}, d^+(4) = 2, d^-(4) = 2$
 $N^+(5) = \{2, 6\}, N^-(5) = \{2, 4, 5\}, d^+(5) = 3, d^-(5) = 3$
 $N^+(6) = \{1, 3\}, N^-(6) = \{1, 5\}, d^+(6) = 2, d^-(6) = 2$

On remarque que les degrés de tous les sommets sont égaux.

Circuit Hamiltonien en : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1
 Qui ce graphique est fortement connexe

Exercice 5

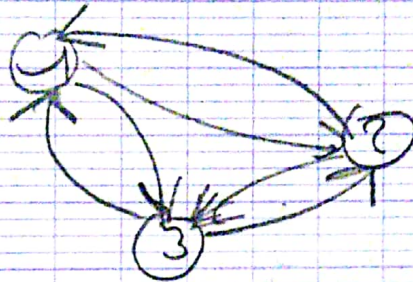
K_n^* a $n(n-1)$ arce

$$d^+(a) = n-1$$

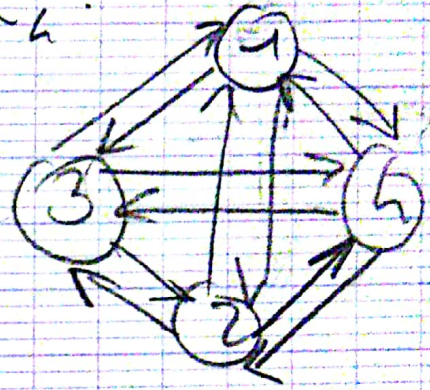
$$d^-(a) = n-1$$

Chemin elementare de 3 à $n-1$

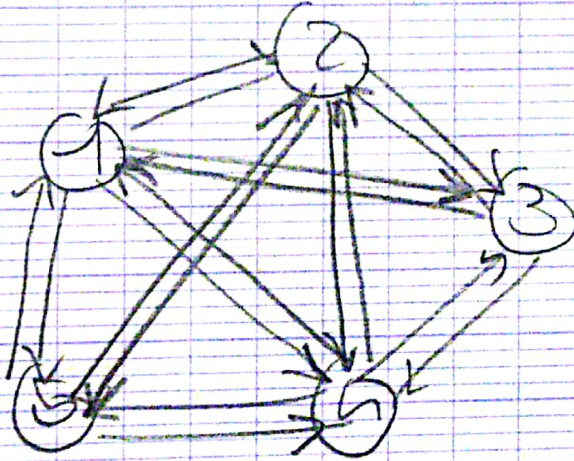
K_3^* :



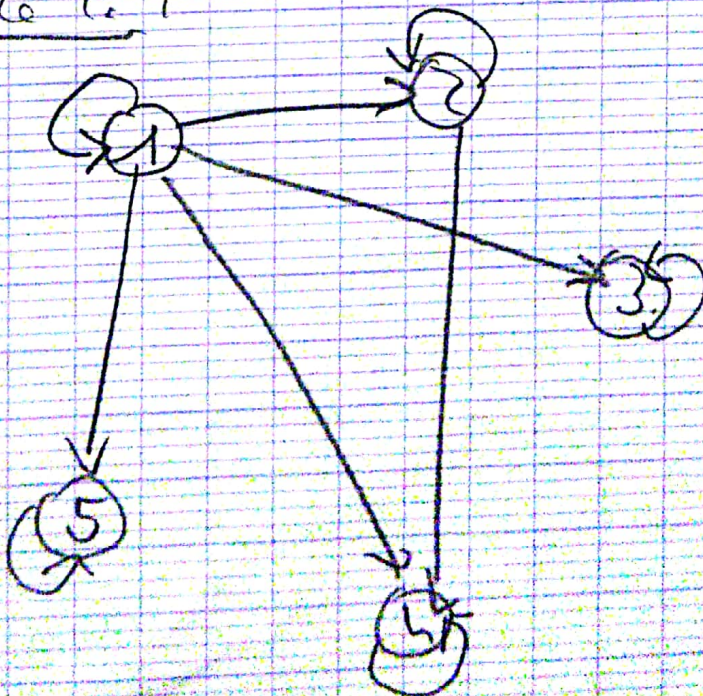
K_4^* :



K_5^* :

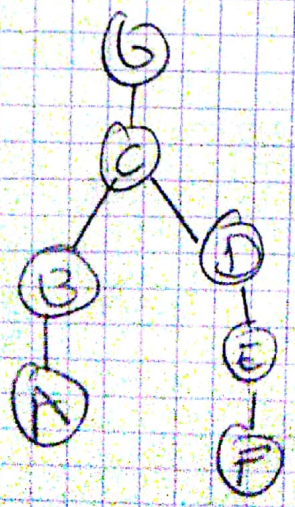
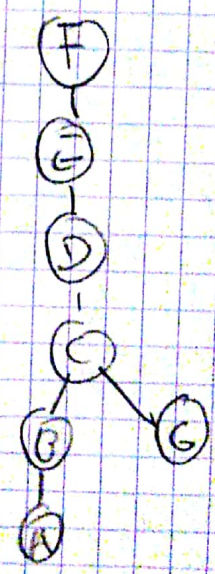
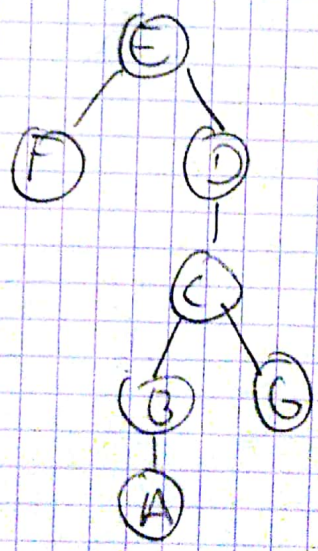
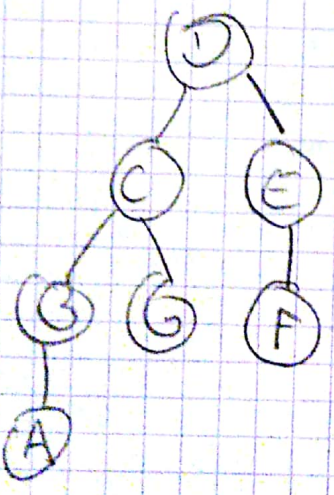
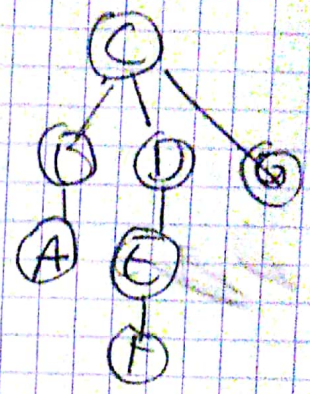
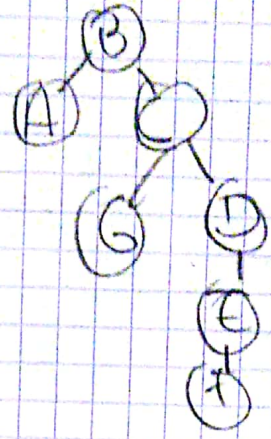


Exercice 1.4



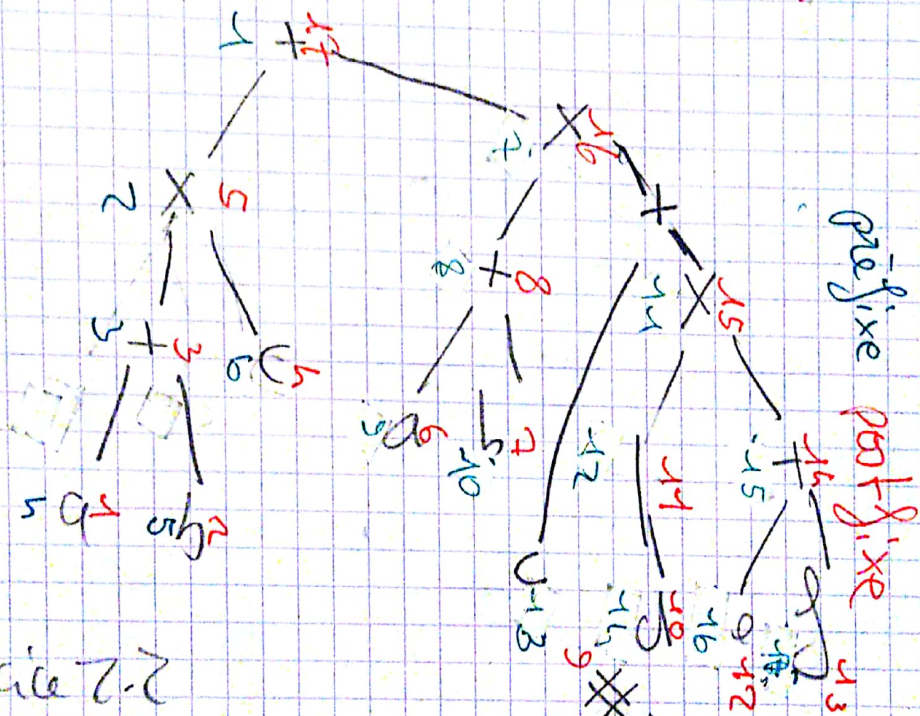
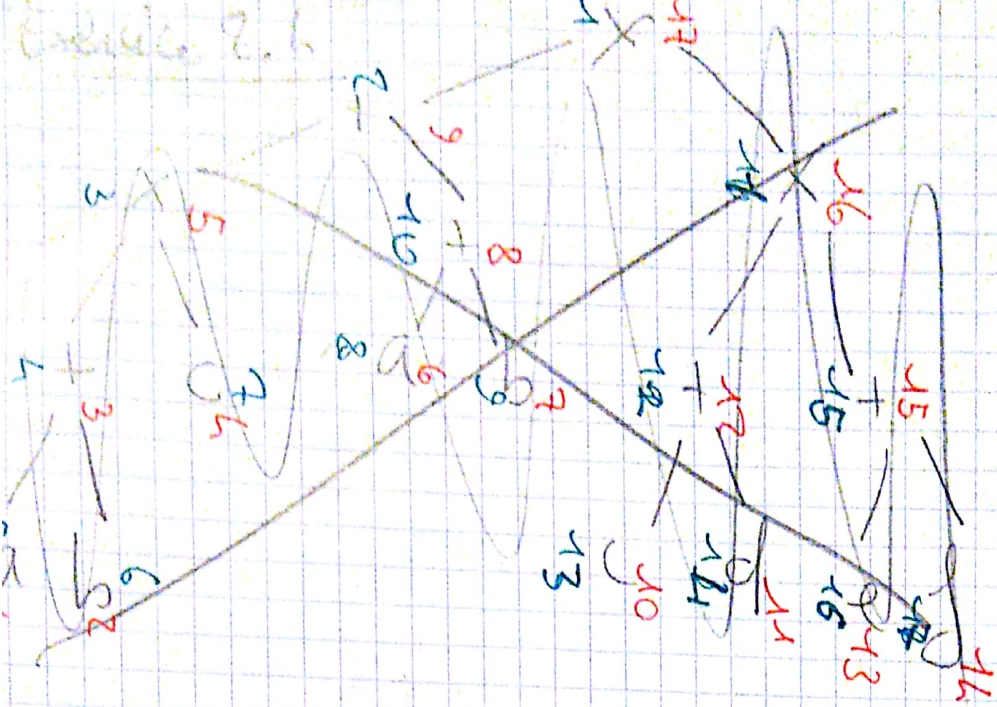
MATHS TD 2

Exercise 2.1



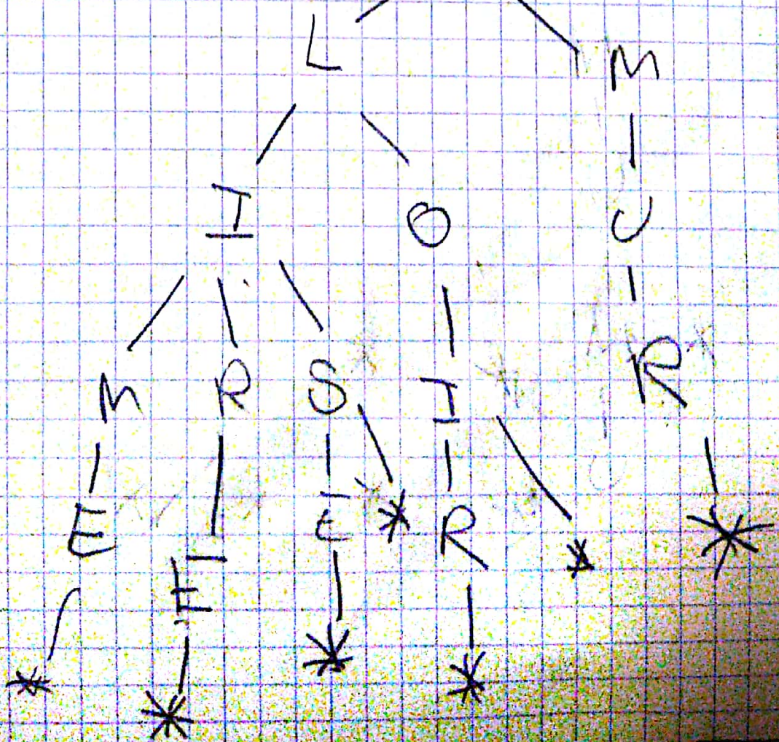
Exercise 2.5

prefixe postfixe



prefixe postfixe

exercice 2.2



✘ : dérivé mot
* : fin mot

~~R > Na; K > B; P > T; Mont > Man; CF > L; B > P; B > V; L > C~~
~~Man > M; P > L; Mont > T; Mont > L; Man > L; V > Na; V > P~~
~~L > S; K > S; P > R; P > S; L > M; B > CF; B > L; T > L~~
~~L > R; P > B~~

$$30 + 25 + 35 + 25 + 12 + 6 + 2 + 43 + 15$$

$$+ 20 + 12 + 15 + 14 + 42 = 209$$

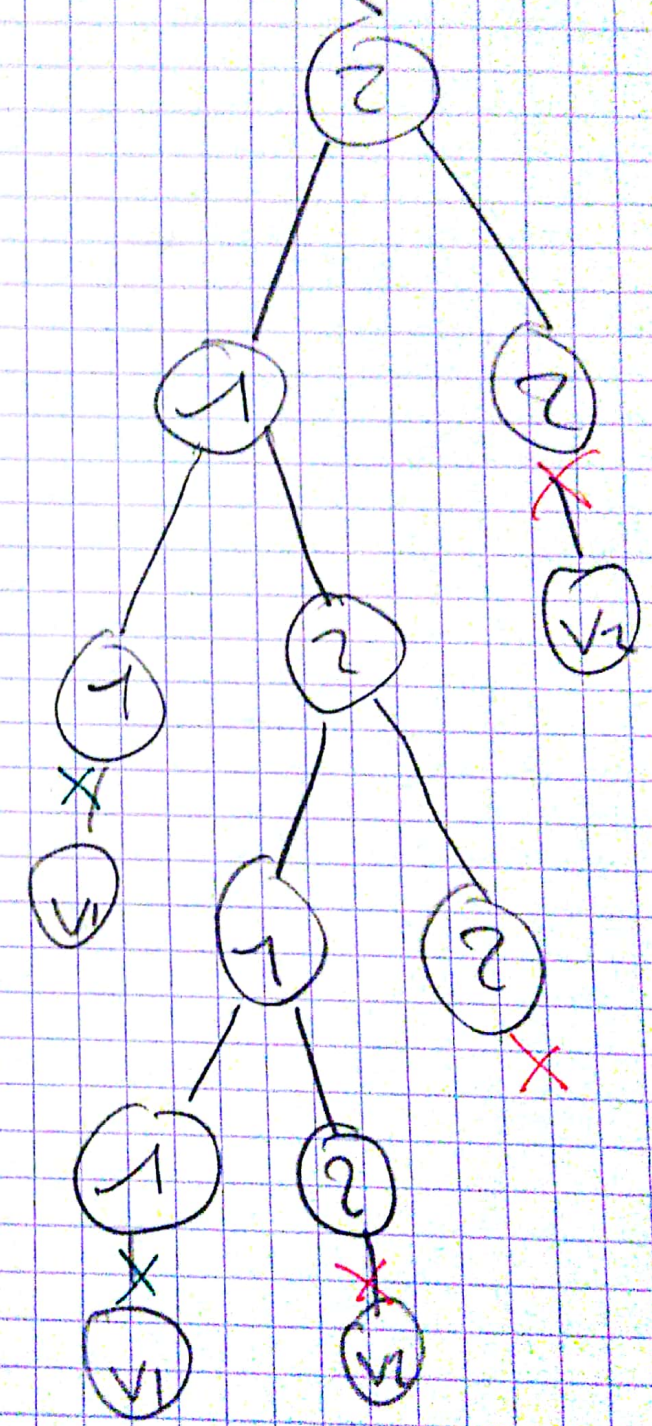
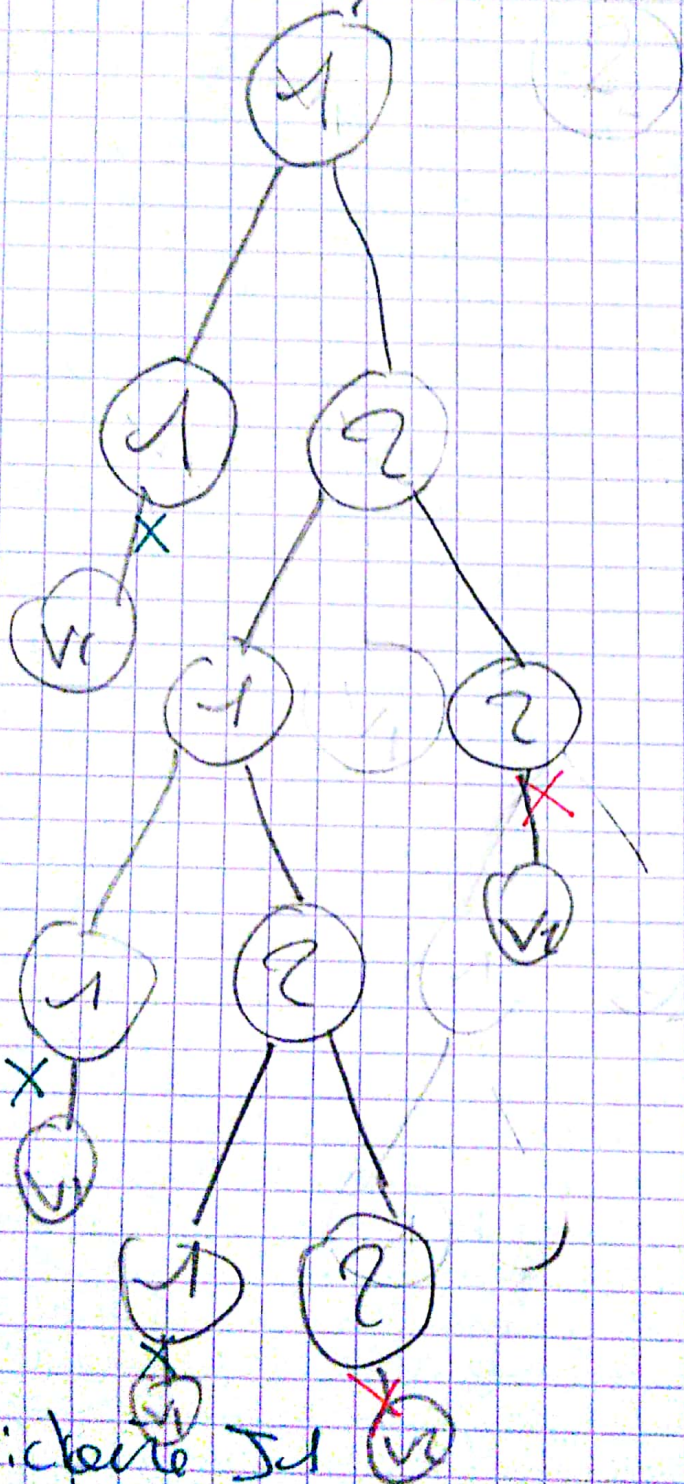
~~$$90 + 25 + 20 + 28 + 32 + 29 + 42$$

$$+ 10 + 25 + 60 + 44$$

$$+ 70 + 66$$

$$223$$

$$221$$~~



victoria 51
 victoria 52

Maths TD 5

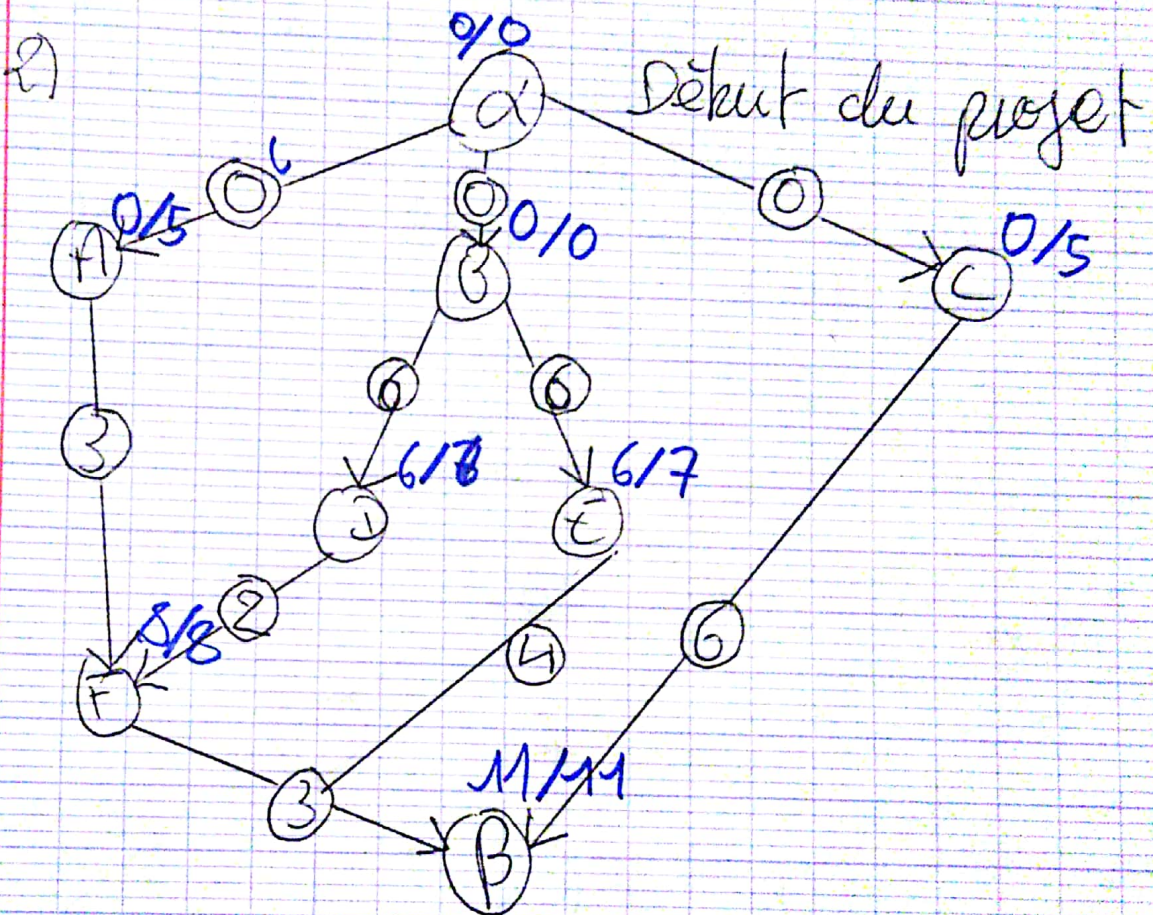
1)

$$t_D - t_B \geq 6$$

$$t_E - t_B \geq 6$$

$$t_F - t_A \geq 3$$

$$t_F - t_D \geq 2$$



Date au plus tôt

Sommets	A	B	C	D	E	F	B
d_i/p_i	0, α	0, α	0, α	6, B	6, B	8, D	11, F

Date au plus tard

Sommets	A	B	C	D	E	F	B
---------	---	---	---	---	---	---	---

d_i/p_i	11, B	6, F	11, D	6, B	5, F	4, B	3, B
-----------	-------	------	-------	------	------	------	------

durée totale

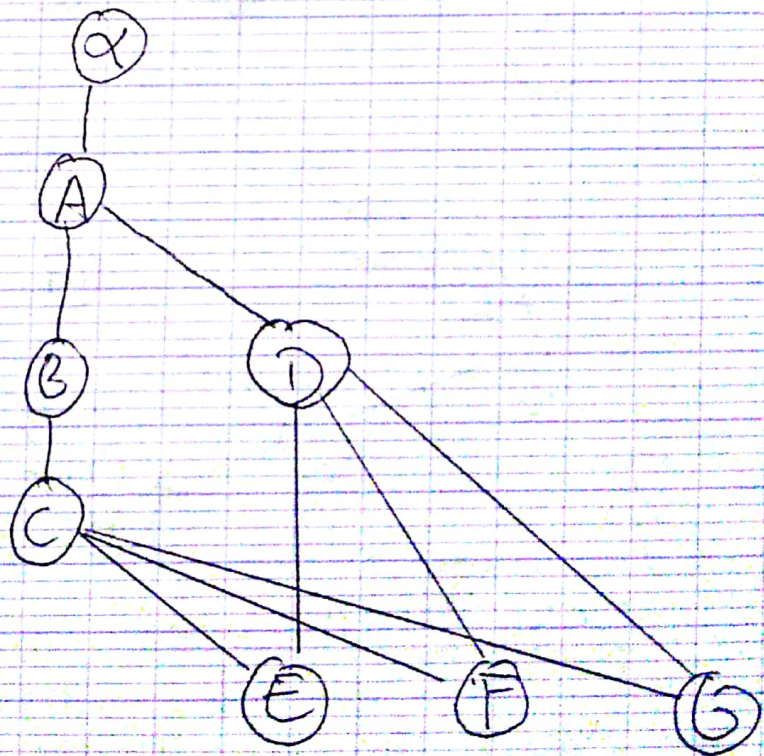
d_i/p_i	0	5	0	5	6	7	8
-----------	---	---	---	---	---	---	---

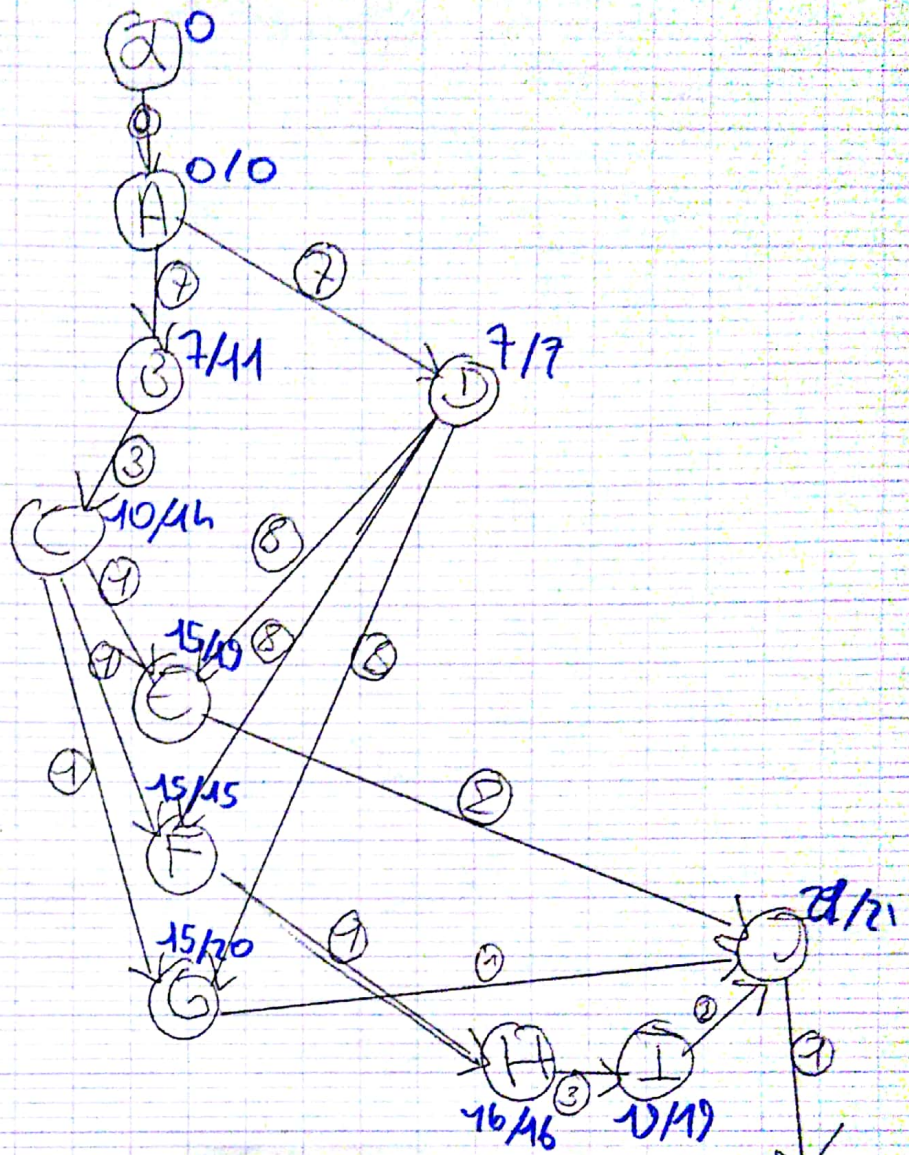
2) La durée minimal du projet est 11

3) Le chemin critique est:
 $\alpha \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow \beta$

4) Non car sa date au plus tard est 5.
Elle peut être retardée de 5 au max
La date au plus tard de D est la
même que sa date au + tôt.
→ on peut pas la retarder sans
augmenter la durée du projet (Sommet
critique).

5.1)





- 1) La date au plus tôt de F est 15. Non
 " " " " " " 8 " 7. Au de L. 21/22
- 2) Ordre de démarrage du projet.

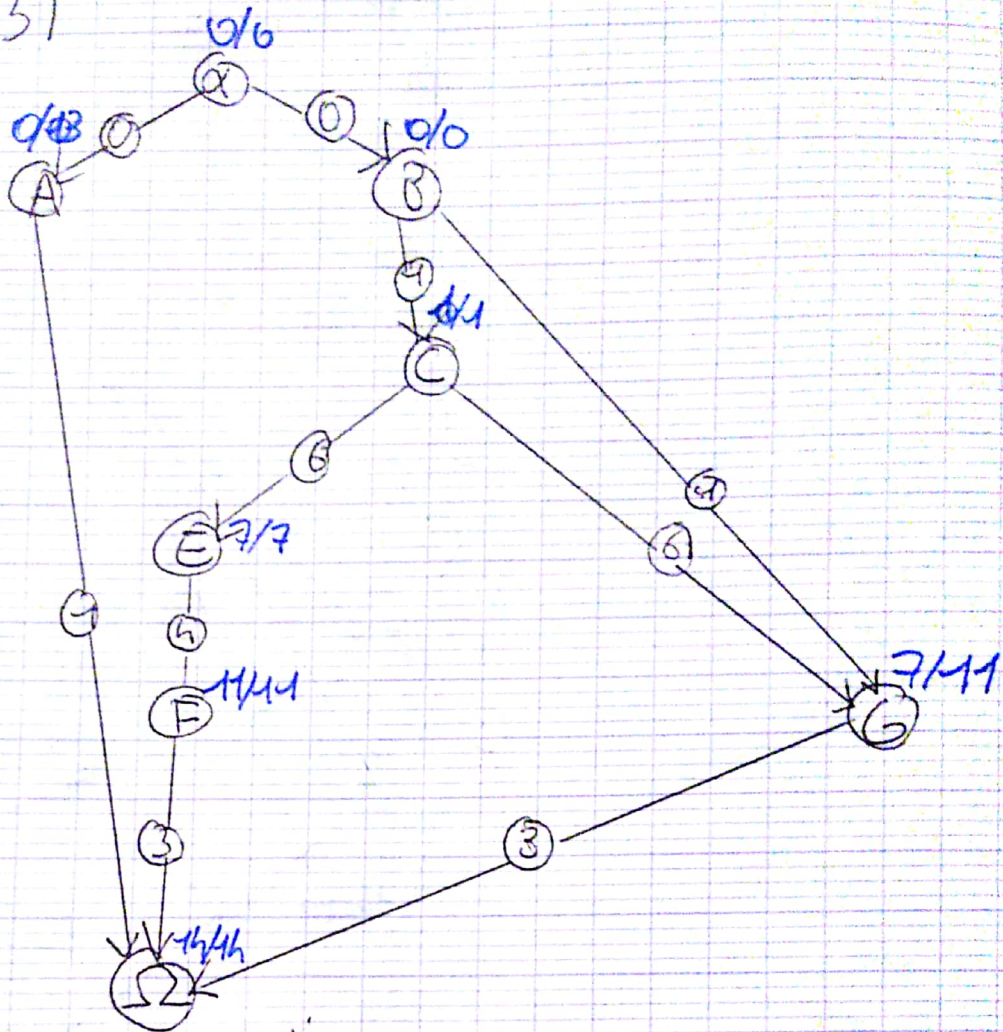
Au plus tôt:

Sommet	alpha	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Omega
di pi	0, 0	0, 10	7, 11	10, 14	7, 17	15, 19	15, 15	15, 19	16, 16	19, 19	19, 21	22, 22

Au plus tard:

Sommet	alpha	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Omega
di pi	22	22	11	14	17	19	15	19	16	19	21	22
durée	0	10	4	4	7	4	0	4	0	0	2	0

I.3)



Ordonnement:

Au plus tôt:

Sommet	α	A	B	C	 	E	F	G	Ω
di pi	0, \emptyset	0, α	0, α	1, β	 	1, γ	1, γ	1, γ	1, γ

Au plus tard:

Sommet	α	A	B	C	E	F	G	Ω
di pi	1, β	1, Ω	1, γ	1, β	1, γ	1, γ	1, γ	1, γ
restriccion	0	1, β	0	1	1	1	1	0