

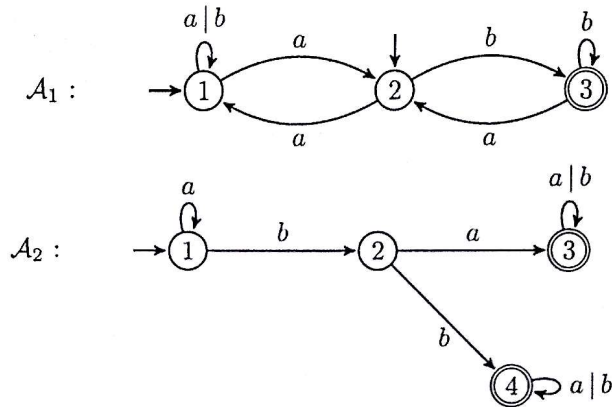
**Théorie des langages – DST du 31 mai 2016**

durée 2h - sans document, sans calculatrice

*Justifiez vos réponses. La note tiendra compte de la qualité des explications et des justifications.*

Les automates et les langages introduits dans cet énoncé ont des noms.  
Lisez bien les questions pour ne pas les confondre!

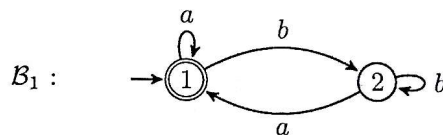
Soit  $\Sigma = \{a, b\}$ . On définit les deux automates finis  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  comme ci-dessous :



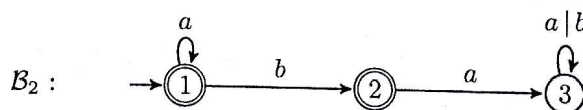
On appelle  $L_1$  le langage reconnu par  $\mathcal{A}_1$  et  $L_2$  le langage reconnu par  $\mathcal{A}_2$ .

**Question 1. (Environ 7 points.)**

1. Ecrire les tables de transitions des deux automates  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ . Sont-ils déterministes ? Complets ? Justifier.
2. Donner une expression régulière de  $L_2$ .
3. Comment  $\mathcal{A}_1$  lit-il les mots  $aab$  ?  $baa$  ? Sont-ils reconnus ?
4. En appliquant l'algorithme de "subset construction", déterminer un AF déterministe et complet équivalent à  $\mathcal{A}_1$ , et le dessiner.
5. Expliquer pourquoi l'AF ci-dessous est un AF déterministe et complet reconnaissant  $\bar{L}_1$ .



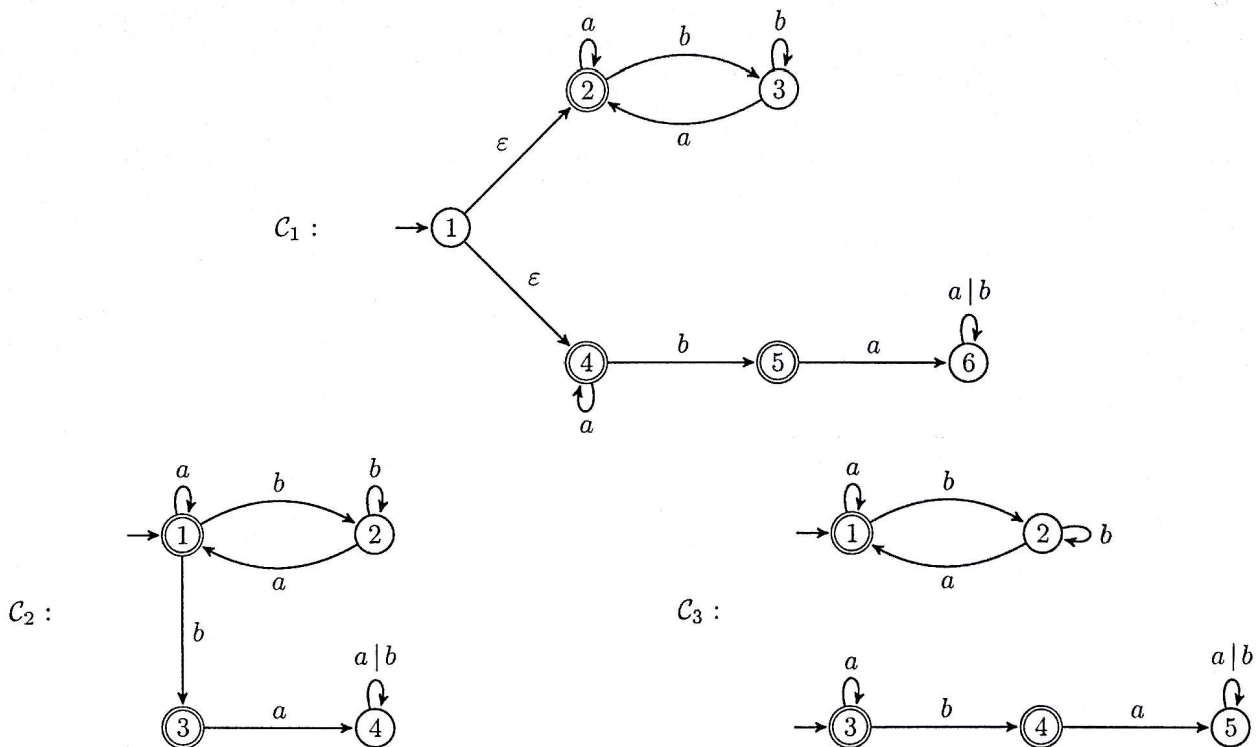
6. Déterminer un AFdc à 4 états reconnaissant  $\bar{L}_2$ .
7. Pourquoi peut-on dire que l'AF ci-dessous reconnaît également  $\bar{L}_2$  ?



**Question 2. (Environ 7 points.)**

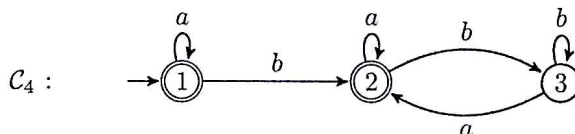
On s'intéresse à présent au langage  $L' = \bar{L}_1 \cup \bar{L}_2$ .

1. Parmi les trois automates ci-dessous, le(s)quel(s) reconnaissent  $L'$ ? Justifier.



- En appliquant l'algorithme de "subset construction avec  $\varepsilon$ -transitions" à  $C_1$ , déterminer un AFdc reconnaissant le même langage. (On devrait trouver un automate à 7 états.)
- En appliquant l'algorithme de Nérode, déterminer l'AFdc minimal reconnaissant le même langage que  $C_1$ , et le dessiner.

On devrait avoir montré que l'AF  $C_4$  ci-dessous reconnaît  $L'$ . Si ce n'est pas le cas, on peut l'admettre pour la suite de l'énoncé.



- Soit  $L_3 = L_1 \cap L_2$ . Exprimer  $L_3$  en fonction de  $L'$ . (Indication : on pourra commencer par exprimer  $\bar{L}_3$  en fonction de  $L'$ , et se souvenir des règles de De Morgan pour les ensembles.)
- En déduire un AFdc minimal reconnaissant  $L_3$ .

**Question 3. (Environ 3 points.)**

1. On définit la grammaire  $G$  par

$$G = (\Sigma, NT = \{S, X\}, S, \{S \rightarrow aS \mid bX, X \rightarrow aX \mid bX \mid b\}).$$

- La grammaire  $G$  est-elle algébrique? linéaire? régulière?
- Dessiner une chaîne de production de la grammaire  $G$ .
- Donner la forme générale des dérivations des mots de  $L(G)$ .
- En déduire une expression régulière de  $L(G)$ .

2. On définit à présent les grammaires  $G$  et  $G''$  par

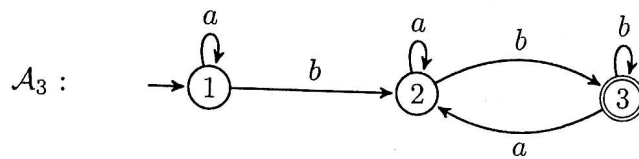
$$G' = (\Sigma, NT = \{S, X\}, S, \{S \rightarrow aS \mid bXb, X \rightarrow (a|b)X \mid \varepsilon\}),$$

$$G'' = (\Sigma, NT = \{S, X, Y\}, S, \{S \rightarrow bXb, bX \rightarrow YbX, X \rightarrow (a|b)X \mid \varepsilon, Y \rightarrow aY \mid \varepsilon\}).$$

La grammaire  $G'$  est-elle algébrique? linéaire? régulière? Mêmes questions pour  $G''$ .

**Question 4. (Environ 3 points.)**

Soit  $\mathcal{A}_3$  l'automate défini ci-dessous.



1. Déterminer une grammaire régulière engendrant le langage reconnu par  $\mathcal{A}_3$ .
2. En utilisant le théorème d'Arden, montrer qu'une expression régulière du langage reconnu par  $\mathcal{A}_3$  est

$$L(\mathcal{A}_3) = a^*b(a|bb^*a)^*bb^*.$$

(Indication : on pourra commencer par éliminer la variable correspondant à l'état 3, puis celle correspondant à l'état 2.)

**Question bonus. (Environ 2 points.)**

On souhaite à présent montrer que  $L(\mathcal{A}_3) = a^*b\Sigma^*b$ . Pour cela, on va montrer que  $(a|bb^*a)^*b^* = \Sigma^*$ .

1. Déterminer un AF à 3 états avec une  $\varepsilon$ -transition, un seul état de départ et un seul état acceptant reconnaissant  $(a|bb^*a)^*b^*$ .
2. En utilisant les algorithmes vus en cours, déterminer un AFdc minimal reconnaissant ce même langage.
3. Conclure.

**Question 5. (Environ 2 points.)**

En vous appuyant sur informations données par Mme Bonzon dans sa conférence, expliquer en quelques lignes la différence existant entre un analyseur syntaxique descendant et un analyseur syntaxique ascendant.