

## Logique formelle

### 1 ENSEMBLES - RELATIONS - APPLICATIONS

#### 1.1 Ensembles et sous-ensembles.

On appelle *ensemble* toute "collection brute" d'objets mathématiques.

Par "collection brute", on entend ici une collection au sens le plus primitif du terme : une telle collection ne comporte pas de répétition (pas d'apparitions multiples d'un même objet) ni d'ordre spécifique (pas de hiérarchie entre ces objets).

Voici quelques premiers exemples :

- On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble de tous les nombres entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

et  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble de tous les entiers naturels non nuls :

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, 3, 2, 1\}$$

$\mathbb{Z}$  désigne l'ensemble de tous les entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

et  $\mathbb{Z}^*$  celui de tous les entiers relatifs non nuls :

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, 3, 2, 1, -1, -2, -3, \dots\}$$

- Dans le plan euclidien, on pourra convenir de noter  $\mathcal{D}$  l'ensemble de toutes les droites et  $\mathcal{C}$  l'ensemble de tous les cercles.
- On convient de noter  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble de toutes les fonctions polynomiales de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , telles que  $X \mapsto \frac{3}{2}X^2 + 7X - \frac{1}{2}$ , ou encore  $X \mapsto X^3 - \frac{5}{2}X^2 + \frac{3}{2}X - 1$ .

Les objets figurant dans une telle collection sont appelés *éléments* de l'ensemble donné. on dit de ces éléments qu'ils *appartiennent* à l'ensemble donné, ce qui se note au moyen du signe  $\in$ . Ainsi a-t-on par exemple

$$0 \in \mathbb{N}, 1 \in \mathbb{N}^*, 0 \notin \mathbb{N}^*, -1 \notin \mathbb{N}, -7 \in \mathbb{Z}, -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \text{ etc } \dots$$

**Attention :** ne confondons surtout pas la notion d'*appartenance* avec celle d'*inclusion*, qui elle se note au moyen du signe  $\subset$  !

Voici donc comment se définit l'*inclusion* :

- on dira d'un ensemble  $F$  qu'il est *inclus dans* l'ensemble  $E$ , et l'on écrira  $F \subset E$ , si tout élément de  $F$  figure aussi dans  $E$ .
- lorsque deux ensembles  $E$  et  $F$  sont tels que  $F \subset E$ , on pourra aussi dire que  $F$  constitue un *sous-ensemble de*  $E$ , ou encore que  $F$  est une *partie de*  $E$ .
- l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $E$  se note  $\mathcal{P}(E)$ .

$\subset$  est une relation d'ordre comme  $>$  mais n'est pas totale, contrairement à  $>$ .

entiers



Voilà encore quelques exemples illustrant ces premières notions :

- L'intervalle discret constitué de tous les nombres entiers situés entre  $-2$  et  $3$  pourra être noté  $[-2; 3]$  : on a donc

$$[-2; 3] = \{n \in \mathbb{Z} / -2 \leq n \leq 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

et bien entendu :  $[-2; 3] \subset \mathbb{Z}$  tandis que  $[-2; 3] \not\subset \mathbb{N}$ .

- L'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $n$  se note  $\mathbb{R}_n[X]$ . Ainsi a-t-on, par exemple,  $(X \mapsto X^2 - 3X + 2) \in \mathbb{R}_2[X]$  et  $(X \mapsto 3X + 7) \in \mathbb{R}_1[X]$ , mais aussi  $(X \mapsto 3X + 7) \in \mathbb{R}_2[X]$ .

Ces ensembles  $\mathbb{R}_n[X]$  sont en fait de plus en plus grands à mesure que l'entier  $n$  grandit, au sens où

$$\mathbb{R}_0[X] \subset \mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}_2[X] \subset \mathbb{R}_3[X] \subset \dots$$

- L'ensemble vide, noté  $\emptyset$ , est un ensemble ne comportant aucun élément.  $\emptyset$  constitue un sous-ensemble de n'importe quel ensemble  $E$ , ainsi pourra-t-on toujours écrire  $\emptyset \subset E$  ou encore  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ .

Quelques dernières remarques et exemples pour clore ce premier paragraphe :

1. Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles de  $E$ , l'égalité  $A = B$  pourra être prouvée en établissant chacune des inclusions  $A \subset B$  et  $B \subset A$  : ainsi pourra-t-on établir une telle égalité en prouvant que tout élément  $x$  de  $A$  appartient à  $B$  et que tout élément  $y$  de  $B$  appartient à  $A$ .
2. La plupart du temps, on sera amené à considérer des ensembles  $A, B, C, \dots$  qui sont en fait des sous-ensembles d'un ensemble connu  $\Omega$ , obtenus en utilisant une certaine propriété. On pourra alors utiliser le signe  $/$  (signifiant "tels que") : ainsi a-t-on, par exemple :

$$\{n \in \mathbb{Z} / n^2 \leq 1\} = [-1; 1], 2\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} / n \text{ est multiple de } 2\} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

3. Comme nous le verrons bientôt (cf exercices), si l'ensemble  $E$  est fini et comporte  $n$  éléments, l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  est lui aussi fini et comporte  $N = 2^n$  éléments (qui sont des sous-ensembles de  $E$ ).

Contentons-nous pour l'instant de vérifier cette affirmation dans le cas où  $E = [-1; 1] = \{-1; 0; 1\}$ , ensemble fini comportant  $n = 3$  éléments. On trouve alors dans  $\mathcal{P}(E)$  :

- un seul sous-ensemble de  $E$  ayant 0 élément, à savoir  $\emptyset$
- 3 sous-ensembles de  $E$  ayant 1 élément exactement, à savoir  $\{-1\}$ ,  $\{0\}$  et  $\{1\}$  (ces trois sous-ensembles sont les *singltons* de  $E$ )
- 3 sous-ensembles de  $E$  ayant 2 éléments exactement, à savoir  $\{-1; 0\}$ ,  $\{0; 1\}$  et  $\{-1; 1\}$  (ces trois sous-ensembles sont les *paires* d'éléments de  $E$ )
- un seul sous-ensemble de  $E$  comportant tous les éléments de  $E$ , à savoir  $E$  lui-même !

Dans toute la suite, on notera  $|A|$  le nombre d'éléments d'un ensemble fini  $A$  (ou cardinal de  $A$ ).

Ainsi a-t-on dans le cas présent, en notant  $\mathcal{P}_k(E)$  l'ensemble des sous-ensembles de  $E$  à  $k$  éléments :

$$|\mathcal{P}_0(E)| = 1, |\mathcal{P}_1(E)| = |\mathcal{P}_2(E)| = 3, |\mathcal{P}_3(E)| = 1, \text{ puis } |\mathcal{P}(E)| = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

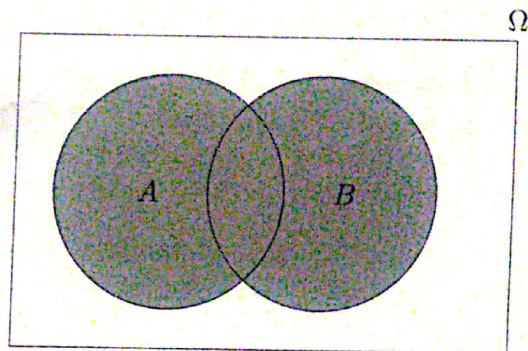
## 1.2 Opérations sur les sous-ensembles

Dans ce paragraphe, on considère un ensemble non-vidé  $\Omega$  ("l'univers") ainsi que des sous-ensemble  $A, B, C, \dots$  de cet ensemble de référence. La plupart des opérations que nous utiliserons consistent à fabriquer un nouveau sous-ensemble à partir de deux sous-ensembles donnés de  $\Omega$ . Voici donc les plus célèbres opérations sur les sous-ensembles :

1. **Réunion** : la réunion ( $A \cup B$ ) est le nouveau sous-ensemble de  $\Omega$  constitué de tous les éléments de  $\Omega$  figurant dans  $A$  ou dans  $B$  :

$$A \cup B = \{x \in \Omega / (x \in A) \text{ ou } (x \in B)\}$$

Le nouveau sous-ensemble de  $\Omega$  ainsi formé, ( $A \cup B$ ), correspond à l'ensemble grisé dans le *diagramme de Venn* ci-dessous

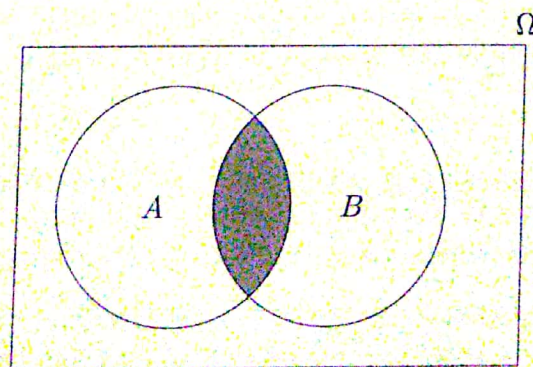


Il est à remarquer que le "ou" employé dans la définition ci-dessus *n'est pas exclusif* : un élément  $x$  de  $\Omega$  situé à la fois dans  $A$  et dans  $B$  appartient à  $A \cup B$ .

2. **Intersection** : l'intersection ( $A \cap B$ ) est le nouveau sous-ensemble de  $\Omega$  constitué de tous les éléments de  $\Omega$  présents à la fois dans  $A$  et dans  $B$  :

$$A \cap B = \{x \in \Omega / (x \in A) \text{ et } (x \in B)\}$$

Le nouveau sous-ensemble de  $\Omega$  ainsi formé, ( $A \cap B$ ), correspond à l'ensemble grisé dans le *diagramme de Venn* ci-dessous

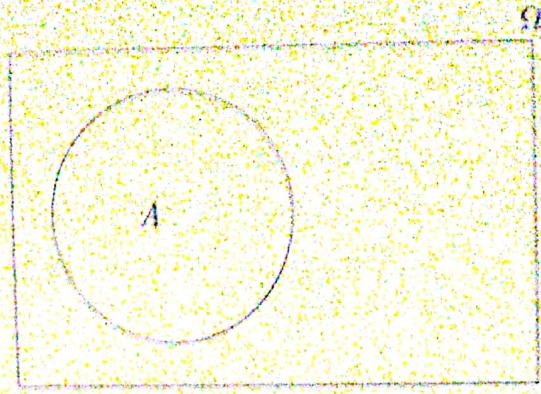


3. **Passage au complémentaire** : le complémentaire  $\bar{A}$  du sous-ensemble  $A$  de  $\Omega$  est le nouvel ensemble constitué de tous les éléments de  $\Omega$  situés hors de  $A$  :

$$\bar{A} = \{x \in \Omega / x \notin A\}$$

ou

Vous pouvez maintenant griser l'ensemble correspondant à  $\bar{A}$ , dans le *diagramme de Venn* ci-dessous



Ces trois opérations sur  $\mathcal{P}(\Omega)$  sont assurément les plus célèbres en théorie des ensembles. À partir de ces trois opérations élémentaires, on peut définir de nouvelles opérations comme par exemple la *différence* ( $A \setminus B$ ), ou encore la *différence symétrique*  $A \Delta B$  (cf exercices).

Voici les principales règles et propriétés à connaître au sujet de ces opérations élémentaires :

- (i) **Règles de commutativité** : les opérations  $\cup$  et  $\cap$  sont *commutatives*, au sens où l'on a toujours, pour tous sous-ensembles  $A, B$  de  $\Omega$  :

$$A \cup B = B \cup A, \text{ et } A \cap B = B \cap A$$

Il n'y a pas lieu d'envisager une règle de commutativité pour le passage au complémentaire, qui constitue une opération "unaire" (à un seul terme).

- (ii) **Règles d'associativité** : les opérations  $\cup$  et  $\cap$  sont *associatives*, au sens où l'on a toujours, pour tous sous-ensembles  $A, B, C$  de  $\Omega$  :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ et } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

L'associativité de  $\cup$  et de  $\cap$  vont nous permettre de définir des opérations de réunion et d'intersection ternaires, quaternaires, etc ... Par exemple, si  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  est une suite finie de quatre sous-ensembles de  $\Omega$  (un quadruplet d'éléments de  $\mathcal{P}(\Omega)$ ), on pourra écrire

$$\bigcup_{i=1}^4 A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = (A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \cup A_4) = A_1 \cup (A_2 \cup (A_3 \cup A_4))$$

et

$$\bigcap_{i=1}^4 A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = (A_1 \cap A_2) \cap (A_3 \cap A_4) = A_1 \cap (A_2 \cap (A_3 \cap A_4))$$

**Remarque:** Ces règles de commutativité et d'associativité semblent aller de soi. Attention cependant, elles ne sont pas toujours valables dans le contexte de la différence ou de la différence symétrique (cf exercices).

- (iii) **Règles de distributivité** : on dit que  $\cap$  est *distributive par rapport à  $\cup$*  et aussi que  $\cup$  est *distributive par rapport à  $\cap$* , au sens où l'on a toujours, pour  $A, B, C$  sous-ensembles de  $\Omega$  :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Remarquons que les parenthèses sont *indispensables* dans l'énonciation de ces deux règles. La première n'est pas sans rappeler une règle de distributivité qui nous est familière en arithmétique ( $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ ) ; la seconde, cependant, n'a pas son analogue en arithmétique : en général,  $a + (b \times c) \neq (a + b) \times (a + c)$  ... Comme quoi on ne pourra pas se

permettre de pousser *trop loin* l'analogie entre réunion et addition d'une part, intersection et multiplication d'autre part !

Bien entendu, ces règles sont encore valables pour des réunions ou intersections à plus de deux termes, ainsi aura-t-on par exemple

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3) = A \cap \left( \bigcup_{i=1}^3 B_i \right) = \bigcup_{i=1}^3 (A \cap B_i)$$

et

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3) = A \cup \left( \bigcap_{i=1}^3 B_i \right) = \bigcap_{i=1}^3 (A \cup B_i)$$

(iv) **Règles de neutralité et d'absorption** : on aura toujours

$$A \cup \emptyset = A \text{ et } A \cap \Omega = A,$$

autrement dit  $\emptyset$  est *élément neutre* pour l'opération  $\cup, \Delta, \setminus$ , tandis que  $\Omega$  est *élément neutre* pour  $\cap$ .

Plus généralement, étant donné deux sous-ensembles  $A, B$  de  $\Omega$ , on aura  $A \subset B$  si et seulement si  $A \cup B = B$ , ou encore si et seulement si  $A \cap B = A$ .

Cette dernière remarque nous conduit à énoncer aussi les *règles d'absorption* ci-dessous :

$$A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

(v) **Lois de De Morgan** : ces lois célèbres, mettant en relation la réunion, l'intersection et le passage au complémentaire, affirment que "*le complémentaire d'une réunion coïncide avec l'intersection des complémentaires*", tandis que "*le complémentaire d'une intersection coïncide avec la réunion des complémentaires*". Ainsi a-t-on toujours

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Plus généralement, si  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  est une suite finie de  $n$  sous-ensembles de  $\Omega$  :

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \text{ tandis que } \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

La règle affirmant que "*le complémentaire du complémentaire coïncide avec l'original*" ( $\overline{\overline{A}} = A$ ) est parfois considérée comme une troisième loi de De Morgan.

(vi) **Règle d'inclusion-exclusion** : si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles *finis* de  $\Omega$ , on a

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

autrement dit :  $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$ .

### 1.3 Produits cartésiens

Étant donnés deux ensembles  $E$  et  $F$ , le **produit cartésien**  $E \times F$  est un nouvel ensemble, constitué de tous les couples  $(x; y)$  où  $x \in E$  et  $y \in F$ . On prendra soin, ici comme dans toute la suite, de distinguer la notion de couple de celle de paire (sous-ensemble à deux éléments) : le couple  $(x; y)$  comporte un *premier terme* ( $x$ ) puis un *second terme* ( $y$ ), et ces deux termes ne sont pas nécessairement distincts !

**Exemples** :

1. Pour  $E = \{1; 3\} = \{1, 2, 3\}$  et  $F = \{-1, 1\}$ , on a

$$E \times F = \{(1; -1), (1; 1), (2; -1), (2; 1), (3; -1), (3; 1)\}$$

2. Pour  $E = F = \mathbb{R}$ , le produit cartésien  $E \times F = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  est l'ensemble de tous les couples  $(x; y)$  de nombres réels. En choisissant un repère dans le plan, on pourra identifier  $\mathbb{R}^2$  à l'ensemble des points du plan.

3. Pour  $E = \{1\}$  et  $F = [0; 2] = \{y \in \mathbb{R} / 0 \leq y \leq 2\}$ , le produit cartésien  $E \times F = \{1\} \times [0; 2]$  s'identifie à un segment de droite dans le plan.

Ici encore, on pourra aussi considérer des produits cartésiens comportant plus que deux termes, par exemple des produits cartésiens ternaires : étant donnés trois ensembles  $E, F$  et  $G$ , le produit cartésien  $E \times F \times G$  est l'ensemble constitué de tous les triplets  $(x; y; z)$  où  $x \in E, y \in F$  et  $z \in G$ . Lorsque  $E$  et  $F$  sont des ensembles finis, on constate aisément que  $|E \times F| = |E| \cdot |F|$ . D'autres propriétés significatives du produit cartésien seront traitées en exercice.

## 1.4 Relations et fonctions

### 1.4.1 Relations binaires

Formellement, une **relation binaire**  $\mathcal{R}$  est un triplet  $\mathcal{R} = (E, F, \Gamma)$ , où  $E$  est un premier ensemble appelé *ensemble de départ*,  $F$  un second ensemble appelé *ensemble d'arrivée*, tandis que  $\Gamma$  est un sous-ensemble du produit cartésien  $E \times F$ .

Si un couple  $(x; y) \in E \times F$  figure dans  $\Gamma$ , on dira que  $x$  est en relation avec  $y$  et on pourra écrire  $x \mathcal{R} y$ .

Toutes les relations étudiées dans ce cours seront binaires, on se contentera donc souvent de parler de "relation" au lieu de "relation binaire". Lorsque, dans une telle relation, les ensembles  $E$  et  $F$  coïncident, on parlera de relation (binaire) *sur* l'ensemble  $E$ .

Il y a au moins deux façons de présenter une telle relation  $\mathcal{R} = (E, F, \Gamma)$  :

- (a) Au moyen d'une *énumération* ou d'une *description* de l'ensemble des couples constituant  $\Gamma$  : par exemple, si  $E = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$  et  $F = \{0, 1\}$ , on pourra considérer  $\mathcal{R} = (E, F, \Gamma)$  donnée par

$$\Gamma = \{(0; 0), (2; 0), (4; 0), (6; 0), (8; 0), (1; 1), (3; 1), (5; 1), (7; 1), (9; 1)\},$$

relation consistant à "étiqueter" les éléments de l'intervalle discret  $]0; 9]$  suivant leur parité. Voici un second exemple : soit  $\equiv$  la relation binaire sur  $E = \mathbb{Z}$  donnée par  $x \equiv y$  si et seulement si les entiers  $x$  et  $y$  ont la même parité ; on a donc ici  $\equiv = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \Gamma)$ , où

$$\Gamma = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 / (y - x) \text{ est pair.}\}$$

- (c) Au moyen d'une *représentation matricielle* : par exemple, la dernière relation du point précédent peut aussi être présentée au moyen d'une *matrice* de format  $|E| \times |E| = 6 \times 6$ , tableau à 6 lignes et 6 colonnes où le terme situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  comporte un '1' si  $i$  est en relation avec  $j$  ( $i \sim j$ ), un '0' sinon. Dans le cas présent, on obtient ainsi la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Examinons de plus près deux types de relations binaires jouant un rôle particulièrement important dans la pratique : les *relations d'équivalence* et les *fonctions*.

### 1.4.2 Relations d'équivalence

On dira qu'une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur l'ensemble  $E$  constitue une *relation d'équivalence* sur  $E$  si  $\mathcal{R}$  satisfait aux trois exigences suivantes :

- (i) **Réflexivité** : tout élément de  $E$  est en relation avec lui-même par  $\mathcal{R}$ , autrement dit on a  $x\mathcal{R}x$  pour tout  $x \in E$ .
- (ii) **Symétrie** : dès lors que  $x, y \in E$  vérifient  $x\mathcal{R}y$ , on doit aussi avoir  $y\mathcal{R}x$ .
- (iii) **Transitivité** : pour tout triplet  $(x; y; z) \in E^3$ , dès lors que  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$ , on doit aussi avoir  $x\mathcal{R}z$ .

Une relation d'équivalence sur l'ensemble  $E$  est donc une relation binaire sur  $E$  qui est tout à la fois *réflexive*, *symétrique* et *transitive*.

Voici encore une dernière définition importante avant de passer à quelques exemples classiques : étant donnée une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $E$ , on appellera *classe* de l'élément  $x$  de  $E$  le sous-ensemble (non-vide) de  $E$  constitué de tous les éléments  $y$  de  $E$  équivalents à  $x$ .

Ce sous-ensemble pourra être noté  $[x]_{\mathcal{R}}$  ou encore, plus simplement,  $[x]$ , et l'on a donc

$$[x] = \{y \in E / x\mathcal{R}y\} = \{y \in E / y\mathcal{R}x\}$$

L'ensemble de toutes les classes ainsi construites est appelé *ensemble quotient* (de  $E$  par  $\mathcal{R}$ ), il se note parfois  $E/\mathcal{R}$ .

#### Exemples :

1. Reprenons l'exemple de la relation  $\equiv$ , relation binaire sur  $E = \mathbb{Z}$  donnée par  $x \equiv y$  si et seulement si les entiers  $x$  et  $y$  ont la même parité ; on a donc ici, pour tout couple  $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$  :

$$x \equiv y \text{ si et seulement si } 2|(y - x),$$

et l'ensemble quotient correspondant, noté traditionnellement  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , ne contient que deux classes : la classe  $[0]$ , sous-ensemble de  $\mathbb{Z}$  constitué de tous les nombres pairs, et la classe  $[1]$ , constituée de tous les nombres impairs.

Il n'est pas difficile de vérifier que la relation binaire  $\equiv$  est tout à la fois *réflexive*, *symétrique* et *transitive*.

2. Plus généralement, étant donné un entier  $m \geq 2$  (le *module* de référence), la relation binaire  $\equiv$  définie sur  $\mathbb{Z}$  par

$$x \equiv y \text{ si et seulement si } m|(y - x)$$

constitue une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$ , appelée *congruence modulo  $m$* . L'ensemble quotient correspondant, traditionnellement noté  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ , est un ensemble fini comportant  $m$  éléments ; en fait, n'importe quel entier relatif  $x$  est congru modulo  $m$  à un unique entier situé dans l'intervalle discret  $[[0; (m - 1)]]$ , en sorte que

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], \dots, [m - 1]\}$$

La classe  $[0]$  contient donc tous les multiples de  $m$ , la classe suivante ( $[1]$ ) contient tous les entiers dont la *division euclidienne* par  $m$  donne un reste valant 1, etc ...

3. On note  $E$  l'ensemble des étudiants inscrits à l'IUT Paris Descartes. On définit alors une relation binaire  $\sim$  sur  $E$  en posant  $x \sim x'$  dès lors que les numéros de sécurité sociale des étudiants  $x$  et  $x'$  commencent par les mêmes trois premiers chiffres.

Il n'est pas difficile de vérifier que la relation  $\sim$  ainsi définie sur l'ensemble  $E$  est à la fois

*réflexive, symétrique et transitive.* L'ensemble quotient  $E/\sim$  est constitué de "strates" recouvrant l'ensemble de la population étudiée, chaque strate correspondant ici à un genre précis et une année de naissance précise.

En fait, le partage de n'importe quelle autre propriété fixée (même sexe, même mois de naissance, même commune de naissance) permettrait de définir bien d'autres relations d'équivalence sur cette population d'étudiants, et ainsi de stratifier cette population de bien des manières.

4. Sur  $\mathcal{D}$ , ensemble de toutes les droites du plan euclidien, définissons la relation  $\mathcal{R}$  en posant  $\mathcal{R}D\mathcal{R}D'$  dès lors que les droites  $D$  et  $D'$  sont parallèles. On vérifie sans trop de peine que la relation ainsi définie sur  $\mathcal{D}$  est à la fois *réflexive, symétrique et transitive*,  $\mathcal{R}$  constitue donc une relation d'équivalence sur  $\mathcal{D}$ , relation qui se note plus couramment  $\parallel$ . Dans le cas présent, l'ensemble quotient  $\mathcal{D}/\parallel$  est infini, et il devient plus difficile d'appréhender sa structure.

Voici encore deux exemples géométriques : sur l'ensemble  $\mathcal{C}$  de tous les cercles du plan, on définit les relations  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  en posant, pour tous cercles  $C$  et  $C'$  :

$$C\mathcal{R}_1C' \text{ si et seulement si } C \text{ et } C' \text{ ont même centre}$$

et

$$C\mathcal{R}_2C' \text{ si et seulement si } C \text{ et } C' \text{ ont même rayon.}$$

$\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  définissent toutes deux des relations d'équivalence sur  $\mathcal{C}$ .

5. Un dernier exemple classique de relation d'équivalence : la relation binaire sur  $\mathbb{R}$  donnée par

$$x \sim y \text{ si et seulement si } (y - x) \in \mathbb{Z}$$

est bien *réflexive, symétrique et transitive*.

Dans ce contexte, l'ensemble  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  de tous les couples  $(x; y)$  de réels équivalents peut être vu comme un ensemble de droites parallèles ; quant à l'ensemble quotient  $\mathbb{R}/\sim$ , il est commode de le représenter par un cercle.

A titre de récapitulation, on pourra observer que toutes sortes de relations d'équivalence pourront être construites sur l'ensemble  $E$  en décrétant que  $x, y \in E$  sont équivalents *dès lors qu'ils partagent une certaine propriété*.

Autre observation importante : toutes les relations d'équivalence vues jusqu'ici nous ont permis de faire apparaître une certaine "stratification" ou *partition* de l'ensemble  $E$  en passant à l'ensemble quotient  $E/\mathcal{R}$  constitué de toutes les classes d'équivalence associées à  $\mathcal{R}$ .

Cette dernière observation est tout à fait fondamentale, en voici donc une formulation plus complète :

- (i) Soit  $E$  un ensemble non-vidé et  $\mathcal{A}$  un ensemble de sous-ensembles de  $E$ .

On dira que  $\mathcal{A}$  constitue une *partition* de  $E$  dès lors que

1. Chacun des éléments  $A$  de  $\mathcal{A}$  est un sous-ensemble *non-vidé* de  $E$
2. Deux éléments distincts de  $\mathcal{A}$  sont toujours *disjoints* : pour  $A, A' \in \mathcal{A}$  tels que  $A \neq A'$ , on a  $A \cap A' = \emptyset$ .
3. La réunion de tous les éléments  $A$  de  $\mathcal{A}$  permet de retrouver  $E$  :  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = E$ .

- (ii) Dès lors que la relation binaire  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $E$ , l'ensemble quotient  $E/\mathcal{R}$  constitue une partition de  $E$ .

- (iii) Réciproquement, si  $\mathcal{A}$  constitue une partition de l'ensemble  $E$ , on parvient à définir une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $E$  en posant  $x\mathcal{R}y$  dès lors que  $x, y \in E$  figurent dans un même sous-ensemble  $A$  appartenant à la partition  $\mathcal{A}$ . Comme  $\mathcal{A}$  constitue une partition de l'ensemble

$E$ , la relation  $\mathcal{R}$  ainsi définie est bien *réflexive*, *symétrique* et *transitive* : c'est en fait la relation d'équivalence sur  $E$  produisant l'ensemble quotient  $\mathcal{A}$  (telle que  $E/\mathcal{R} = \mathcal{A}$ ).

En bref : se donner une relation d'équivalence sur l'ensemble  $E$  reviendra toujours à "stratifier"  $E$  en une certaine partition.

## 1.5 Fonctions

Venons-en à un dernier type de relations binaires fort classiques : les *fonctions*.

Dans tout ce qui suit, on considère une relation binaire  $\varphi = (E; F; \Gamma)$  ayant  $E$  pour ensemble de départ et  $F$  pour ensemble d'arrivée.

1. On dira que  $\varphi$  constitue une **fonction de  $E$  vers  $F$**  si chacun des éléments de l'ensemble  $E$  admet une image et une seule dans  $F$  par  $\varphi$ .
2. Une fonction  $\varphi : E \rightarrow F$  sera dite
  - **injective** si, pour tout élément  $y$  de  $F$ , il existe *au plus* un élément  $x$  de  $E$  tel que  $\varphi(x) = y$  ; l'injectivité de  $\varphi$  se traduit donc par le fait que deux éléments distincts  $x$  et  $x'$  de l'ensemble de départ  $E$  n'ont jamais la même image par  $\varphi$ .
  - $\varphi$  sera dite **surjective** si, pour tout élément  $y$  de  $F$ , il existe *au moins* un élément  $x$  de  $E$  tel que  $\varphi(x) = y$ .
  - $\varphi$  sera dite **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective, autrement dit si pour chacun des élément  $y$  de  $F$ , il existe *exactement* un élément  $x$  de  $E$  tel que  $\varphi(x) = y$ .

Voici enfin quelques exemples construits à partir de fonctions polynomiales :

- $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$  constitue une bijection de  $\mathbb{R}$  vers lui-même.
- $\varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  qui n'est ni injective, ni surjective. En revanche,  $\varphi_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  est une fonction de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$  qui est injective et pas surjective et  $\varphi_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}^+$  qui est surjective et pas injective, tandis que  $\varphi_5 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur lui-même.
- $\varphi_6 : x \mapsto \frac{x^3}{1-x^2}$  n'est définie que sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  et elle constitue une surjection de  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  sur  $\mathbb{R}$ .

## 1.6 Exercices

**Exercice 1 : Présentation de quelques ensembles.** Donner une présentation énumérative de chacun des ensembles ci-dessous :

1.  $E = \{x \in \llbracket 1; 50 \rrbracket \mid x \text{ est un multiple de } 7\}$
2.  $F = \{x \in \llbracket 1; 50 \rrbracket \mid 50 \leq x^2 < 100\}$
3.  $G = \{x \in \llbracket 1; 50 \rrbracket \mid x \text{ est premier. } \}$

**Exercice 2 : Opérations ensemblistes.** Soient  $A, B, C$  les sous-ensembles de l'univers  $\Omega = \llbracket 1; 10 \rrbracket = \{1, 2, \dots, 10\}$  donnés par

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 5, 7\}, C = \{1, 4, 5, 6\}$$

Décrire, dans ce contexte, le résultat des opérations suivantes :

$$B \cap C; \bar{C}; (A \cup B) \cap C; A \cup (B \cap C); \overline{(A \cup B)}$$

**Exercice 3 : Différence et différence symétrique.** Soient  $A$  et  $B$  des sous-ensembles d'un univers  $\Omega$ .

La différence  $A \setminus B$  est le nouvel ensemble constitué de tous les éléments de  $\Omega$  situés à la fois dans  $A$  et hors de  $B$  :

$$A \setminus B = \{x \in \Omega / (x \in A) \text{ et } (x \notin B)\}.$$

La différence symétrique  $A \Delta B$  est le nouvel ensemble constitué de tous les éléments de  $\Omega$  situés dans  $A$  et hors de  $B$ , ou encore dans  $B$  et hors de  $A$ . Autrement dit,  $A \Delta B$  est constitué de tous les éléments  $x$  de  $\Omega$  situés dans  $A$  "ou bien" dans  $B$  (on emploie ici un *ou exclusif* !):

$$A \Delta B = \{x \in \Omega / ((x \in A) \text{ et } (x \notin B)) \text{ ou } ((x \in B) \text{ et } (x \notin A))\}$$

1. Ecrire  $A \setminus B$  et  $A \Delta B$  à l'aide des trois opérations élémentaires,  $\cup, \cap$  et complémentaire, appliquées aux ensembles  $A$  et  $B$ . Les représenter par un *diagramme de Venn*.
2. Décrire le résultat des opérations  $A \setminus B, A \Delta B, A \setminus C$  et  $A \Delta C$  avec les ensembles  $A, B, C$  de l'exercice précédent.
3. Ces nouvelles opérations sont-elles commutatives? associatives?

**Exercice 4 : Différence symétrique et distributivité.**

1. Utiliser un diagramme de Venn afin de retrouver les règles de distributivité ci-dessous :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

2. Peut-on affirmer que l'on a toujours

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) ?$$

3. Peut-on affirmer que l'on a toujours

$$A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C) ?$$

(Dans les deux dernières questions ci-dessus, on pourra à nouveau utiliser un diagramme de Venn, ou encore rechercher un contre-exemple).

**Exercice 5 : Quelques règles supplémentaires.** En employant les règles connues ou encore un diagramme de Venn, prouver la validité des règles ci-dessous :

1.  $\overline{(A \cap B)} \cup B = \bar{A} \cup B$
2.  $\overline{(A \cap (B \cup C))} = A \cup B \cup C$
3.  $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \bar{B} \cup C) \cap \overline{(A \cup C)} = \emptyset$
4.  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

**Exercice 6 : Une nouvelle opération.**  $\Omega$  étant un ensemble non-vidé donné, on définit une nouvelle opération  $\star$  sur  $\mathcal{P}(\Omega)$  par l'identité  $A \star B = \overline{(A \cap B)}$ .

1. Représenter cette nouvelle opération au moyen d'un diagramme de Venn.
2. Vérifier que  $A \star A = \bar{A}$
3. Vérifier que  $(A \star A) \star (B \star B) = A \cup B$
4. Vérifier que  $(A \star B) \star (A \star B) = A \cap B$
5. Peut-on affirmer que  $\star$  est commutative ? Associative ?

**Exercice 7 : Quelques règles au sujet du produit cartésien.** Dans tout ce qui suit,  $A, B$  et  $C$  sont des sous-ensembles de l'univers  $\Omega$ .

1. A quelle condition a-t-on  $A \times B = B \times A$  ?
2. A quelle condition a-t-on  $A \times B = A \times C$  ?
3. Peut-on affirmer que l'on a toujours  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$  ?
4. Peut-on affirmer que l'on a toujours  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$  ?

(On pourra traiter chacune de ces questions en commençant par considérer des exemples simples où  $\Omega = \llbracket 1; 5 \rrbracket$ ).

**Exercice 8 : Descriptions de relations binaires.** On considère les relations binaires  $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$  sur  $\Omega = \llbracket 1; 7 \rrbracket$  données respectivement par

$$x\mathcal{R}y \text{ ssi } 2x + y = 9, \quad x\mathcal{S}y \text{ ssi } x + y < 7, \quad x\mathcal{T}y \text{ ssi } y = x^2.$$

1. Donner une description énumérative de chacun des sous-ensembles de  $\Omega^2$  correspondant à ces relations.
2. Décrire chacune de ces relations au moyen d'une matrice de format  $(7 \times 7)$ .
3. Donner enfin une description de chacune de ces relations au moyen d'un graphe orienté.
4. Soit  $\Omega' = \llbracket 1; 3 \rrbracket$ ,  $\Omega'' = \llbracket 1; 4 \rrbracket$ , puis  $\mathcal{U}$  la relation binaire sur  $\Omega' \times \Omega''$  pouvant être décrite au moyen de la matrice  $M_{\mathcal{U}}$  ci-dessous :

$$M_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner une description énumérative, puis une description graphique de cette relation  $\mathcal{U}$ .

**Exercice 9 : Réflexivité, symétrie, transitivité.** Sur  $\Omega = \mathbb{Z}$ , on considère les relations binaires  $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{U}$  données respectivement par:

$$x\mathcal{R}y \text{ ssi } x + y \text{ est un entier pair} \quad x\mathcal{S}y \text{ ssi } x + y \text{ est un entier impair}$$

$$x\mathcal{T}y \text{ ssi } xy \text{ est un entier impair} \quad x\mathcal{U}y \text{ ssi } x + xy \text{ est un entier pair}$$

Déterminer, pour chacune d'entre elles, s'il s'agit d'une relation réflexive, symétrique ou encore transitive.

**Exercice 10 : Etudes de relations d'équivalence.**

1. Une relation  $\mathcal{R}$  est définie sur  $\Omega = \mathbb{Z}$  par  $x\mathcal{R}y$  ssi  $x^2 - y^2$  est divisible par 3. Prouver que  $\mathcal{R}$  constitue une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$ , puis déterminer la partition correspondante de  $\mathbb{Z}$  en classes d'équivalence.

2. Décrire la partition en classes d'équivalence obtenue dans le contexte de chacune des relations d'équivalence ci-dessous :

(i)  $\Omega_1 = \{1; n\}$  fournit les numéros de tous les livres d'une bibliothèque, et pour  $(x, y) \in \Omega_1^2$  :

$$x \mathcal{R}_1 y \text{ ssi les livres } x \text{ et } y \text{ ont même auteur}$$

(ii)  $\Omega_2 = \mathbb{Z}$ , et pour  $(x, y) \in \Omega_2^2$  :

$$x \mathcal{R}_2 y \text{ ssi } (x - y) \text{ est un multiple de } 7$$

(iii)  $\Omega_3 = \{1; N\}$  fournit les matricules de tous les étudiants de Paris Descartes, et pour  $(x, y) \in \Omega_3^2$  :

$$x \mathcal{R}_3 y \text{ ssi les étudiants } x \text{ et } y \text{ sont du même sexe}$$

(iv)  $\Omega_4 = \mathbb{R}^2$ , et pour  $(x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2$  :

$$(x; y) \mathcal{R}_4 (z; t) \text{ ssi } x^2 + y^2 = z^2 + t^2$$

**Exercice 11 : Injections, surjections, bijections.** Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, s'il s'agit d'une fonction injective, surjective ou bijective :

$$f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x$$

$$f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto -x$$

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$$

$$f_5 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x + 1$$

$$f_6 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x + 1$$

$$f_7 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x; y) \mapsto (x + y; x - y) \quad f_8 : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*, (n; p) \mapsto 2^n(2p + 1)$$

Le cas échéant, on recherchera une expression de la bijection réciproque.

**Exercice 12 : Projection canonique.** Soit  $\Omega$  un ensemble non-vide, puis  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $\Omega$ .

- Vérifier que l'application  $\Pi : \Omega \rightarrow (\Omega / \sim)$  donnée, pour  $x$  variant dans  $\Omega$ , par  $\Pi(x) = [x] = \{y \in \Omega / x \sim y\}$ , constitue bien une surjection de  $\Omega$  sur  $(\Omega / \sim)$ . Y-a-t-il des cas où cette *projection canonique*  $\Pi : \Omega \rightarrow (\Omega / \sim)$  est aussi injective ?
- Réciproquement, étant donnés deux ensembles non-vides  $\Omega$  et  $\Omega'$  puis une application surjective  $F : \Omega \rightarrow \Omega'$ , prouver que la relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $\Omega$  par

$$x \mathcal{R} y \text{ si et seulement si } F(x) = F(y)$$

est bien une relation d'équivalence sur  $\Omega$ .

Comment décrire les classes d'équivalence correspondantes en termes d'*images réciproques* par  $F$  ?

## 2 EXPRESSIONS LOGIQUES - FORMULES LOGIQUES

L'art d'opérer des manipulations logiques d'informations joue un rôle fondamental dans la compréhension du fonctionnement interne des ordinateurs mais aussi, par exemple, dans l'étude des dialogues Homme-Machine et plus généralement en Intelligence Artificielle.

### 2.1 Constructions d'expressions logiques.

Au collège puis au lycée, chacun aura appris à construire et manipuler des expressions algébriques, telles que  $a \times (x + 7)$  ou encore  $(by + c)/(3x + 2)$  : les objets utilisés sont ici des *constantes* (7, 3, 2) ou des *variables algébriques* ( $a, x, b, y$ ), ces objets sont assemblés au moyen d'*opérations algébriques* (telles que  $+$ ,  $\times$ ,  $/$ ), en faisant usage de *délimiteurs* (parenthèses, crochets, accolades). De la même manière, les expressions que nous construirons et manipulerons en Logique Formelle comportent des *objets*, assemblés au moyen de *connecteurs* en faisant éventuellement usage de *délimiteurs*.

Les objets apparaissant dans de telles expressions logiques pourront être des *constantes logiques* ou encore des *variables logiques* (encore appelées *variables propositionnelles*). Les *constantes logiques* sont simplement des propositions pouvant être vraies ou fausses, telles que "Pierre joue du piano", "Quentin joue de l'accordéon", "Rachel joue de la harpe", " $E = mc^2$ ", "Il pleuvra ce soir", "Demain il fera beau", "My Tailor is rich" ...

Deux constantes "extrêmes" joueront un rôle important dans la suite : la *proposition certaine*, notée **1**, qui a la propriété d'être *toujours vraie*, et la *proposition impossible*, notée **0**, qui a la propriété d'être *toujours fausse*.

Tout comme en algèbre, nous serons amenés à assembler non seulement des constantes mais aussi des *variables logiques* ou *variables propositionnelles* ; ces variables seront en général notées au moyen de caractères latins minuscules ( $a, b, c$ , etc ..., ou encore  $p, q, r$ , etc ...), et de telles variables représentent des propositions logiques arbitraires, elles-mêmes susceptibles d'être vraies ou fausses.

Il y a **trois connecteurs fondamentaux** qui seront d'un usage constant dans la suite de ce chapitre :

- Le connecteur de **conjonction** "ET", qui s'écrit couramment  $\wedge$ .
- Le connecteur de **disjonction** "OU", qui s'écrit couramment  $\vee$ .
- Le connecteur de **négation** "NON", qui s'écrit couramment  $\neg$ .

De même que le remplacement de chaque variable par des constantes permet d'évaluer une expression algébrique, le remplacement de chaque variable propositionnelle par une proposition logique va nous permettre de donner un sens à chacune des expressions logiques que nous aurons construites dans les règles de l'art.

Avant de passer à nos premiers exemples, remarquons tout de suite que les deux premiers connecteurs présentés ci-dessus sont de nature *binaires* (ils sont faits pour relier *deux* variables ou expressions logiques), tandis que le dernier est de nature *unaire* (la négation porte sur une seule variable ou expression logique à la fois). Comme nous pourrions rapidement le constater, les parenthèses et autres délimiteurs s'avèrent *indispensables* dans la construction et la manipulation d'expressions logiques.

Voici donc quelques premiers *exemples d'interprétations d'expressions logiques* :

1. Si l'on attribue à la variable logique  $a$  le sens "Il pleuvra ce soir" et à la variable logique  $b$  le sens "Demain il fera beau", l'expression

$$a \wedge \neg b$$

prend le sens suivant : "Ce soir il pleuvra et demain il ne fera pas beau".

2. Si l'on attribue aux variables logiques  $p, q, r$  les sens respectifs "Pierre joue du piano", "Quentin joue de l'accordéon" et "Rachel joue de la harpe", l'expression

$$p \vee \neg q$$

prend le sens suivant : "Pierre joue du piano ou Quentin ne joue pas de l'accordéon".

3. Avec les mêmes conventions, l'expression

$$p \wedge \neg (q \vee r)$$

prend le sens suivant : "Pierre joue du piano et il est faux que Quentin joue de l'accordéon ou que Rachel joue de la harpe".

4. Un déplacement des parenthèses vers la gauche donnera par exemple la nouvelle expression ci-dessous :

$$(p \wedge \neg q) \vee r$$

qui, avec les mêmes conventions, prend un sens différent : "Pierre joue du piano et Quentin ne joue pas de l'accordéon, ou Rachel joue de la harpe".

Faisons tout de suite quelques commentaires relatifs à ces exemples :

- (i) Ici comme dans toute la suite, le signe " $\vee$ " est employé pour désigner une disjonction *inclusive* (disjonction au sens large) et non une disjonction *exclusive*<sup>1</sup>.
- (ii) Comme le montrent les deux derniers exemples, l'emploi de délimiteurs s'avère indispensable dans une expression comportant à la fois des conjonctions et des disjonctions.
- (iii) Par convention, si le connecteur de négation  $\neg$  n'est pas suivi immédiatement d'un délimiteur, il porte seulement sur la variable ou la constante qui le suit.

Jusqu'à présent, nous avons surtout insisté sur les analogies entre la formation d'expressions algébriques et celle des expressions logiques. Comme nous allons le voir maintenant, une telle analogie est encore plus satisfaisante si l'on met en parallèle la formation d'expressions logiques et les calculs ensemblistes abordés au chapitre précédent.

### 2.1.1 L'analogie ensembliste.

Plaçons-nous un instant du point de vue d'un institut de sondages cherchant à définir différents profils d'électeurs.

Pour cet institut, les seules propositions intéressantes portent sur les qualités ou caractéristiques d'un membre du corps électoral ("Être un homme", "Être une femme", "Être âgé d'au moins 40 ans", "Être inscrit dans un établissement d'enseignement supérieur", etc ...). De telles propositions pourront être vraies ou fausses, selon le membre du corps électoral interrogé ; ces propositions s'identifient en fait à différents sous-ensembles de l'univers  $\Omega$  constitué de tous les électeurs.

Dans cette analogie :

- Le connecteur de conjonction  $\wedge$  correspond précisément à l'intersection  $\cap$ .
- Le connecteur de disjonction  $\vee$  correspond précisément à la réunion  $\cup$ .
- Le connecteur de négation  $\neg$  correspond précisément au passage au complémentaire  $\overline{\phantom{x}}$ .

A chaque expression logique correspond ainsi un calcul ensembliste ; par exemple :

<sup>1</sup> Les disjonctions exclusives sont d'un emploi courant dans nos restaurants, où il est souvent question de Formules "Entrée + Plat" OU "Plat + Dessert".

1. Si l'on associe aux variables logiques  $a$  et  $b$  deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  dans l'univers  $\Omega$ , l'expression logique  $a \wedge \neg b$  correspond au calcul ensembliste  $A \cap \overline{B}$ .
2. Si l'on associe aux variables logiques  $p$  et  $q$  deux sous-ensembles  $P$  et  $Q$  dans l'univers  $\Omega$ , l'expression logique  $p \vee \neg q$  correspond au calcul ensembliste  $P \cup \overline{Q}$ .
3. En associant à la variable logique  $r$  un troisième sous-ensemble  $R$  de l'univers  $\Omega$ , on obtient pour l'expression logique  $p \wedge \neg(q \vee r)$  le calcul ensembliste  $P \cap \overline{(Q \cup R)}$ .
4. En revanche, l'expression logique  $(p \wedge \neg q) \vee r$  correspond au calcul ensembliste  $(P \cap \overline{Q}) \cup R$ , qui est bien entendu différent du précédent.

Suivant cette analogie, les connecteurs élémentaires  $\wedge, \vee$  et  $\neg$  jouissent de propriétés telles que la commutativité ou l'associativité, que nous avons déjà rencontrées dans le contexte ensembliste.

### 2.1.2 Principales propriétés des connecteurs fondamentaux

Voici donc un inventaire des plus importantes propriétés de  $\wedge, \vee$  et  $\neg$ . Dans la suite, pour construire puis comparer des expressions logiques, nous emploierons le signe  $\equiv$  là où un simple signe  $=$  est utilisé en algèbre ou dans un calcul ensembliste.

- (i) **Règles de commutativité** : les connecteurs  $\wedge$  et  $\vee$  sont *commutatifs*, au sens où l'on aura toujours

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \quad \text{et} \quad p \vee q \equiv q \vee p$$

- (ii) **Règles d'associativité** : les connecteurs  $\wedge$  et  $\vee$  sont aussi *associatifs*, au sens où l'on aura toujours

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad \text{et} \quad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

Ces propriétés d'associativité rendent possibles la définition de conjonctions ou disjonctions ternaires, quaternaires, ... Par exemple, si  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sont des variables logiques, on pourra écrire

$$\bigvee_{i=1}^4 a_i \equiv a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4 \equiv (a_1 \vee a_2) \vee (a_3 \vee a_4) \equiv a_1 \vee (a_2 \vee (a_3 \vee a_4))$$

et

$$\bigwedge_{i=1}^4 a_i \equiv a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 \equiv (a_1 \wedge a_2) \wedge (a_3 \wedge a_4) \equiv a_1 \wedge (a_2 \wedge (a_3 \wedge a_4))$$

- (iii) **Règles de distributivité** :  $\wedge$  est distributive par rapport à  $\vee$  et  $\vee$  est distributive par rapport à  $\wedge$ , au sens où l'on aura toujours :

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{et} \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Bien entendu, ces règles sont encore valables pour des conjonctions ou disjonctions à plus de deux termes, ainsi aura-t-on par exemple

$$p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee q_3) \equiv p \wedge \left( \bigvee_{i=1}^3 q_i \right) \equiv \bigvee_{i=1}^3 (p \wedge q_i)$$

et

$$p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge q_3) \equiv p \vee \left( \bigwedge_{i=1}^3 q_i \right) \equiv \bigwedge_{i=1}^3 (p \vee q_i)$$

1 : proposition certaine 0 : proposition impossible

(iv) Règles de neutralité et d'absorption : on aura toujours

$$p \vee 0 \equiv p \text{ et } p \wedge 1 \equiv p, \quad p \wedge 0 \equiv 0 \text{ et } p \vee 1 \equiv 1$$

(v) Lois de De Morgan : ces lois célèbres s'énoncent aussi dans le contexte des constructions d'expressions logiques et affirment que "la négation d'une disjonction coïncide avec la conjonction des négations", tandis que "la négation d'une conjonction coïncide avec la disjonction des négations". Ainsi aura-t-on toujours

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \text{ et } \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q,$$

ou même, plus généralement :

$$\neg \left( \bigvee_{i=1}^n p_i \right) \equiv \bigwedge_{i=1}^n \neg p_i \quad \text{tandis que} \quad \neg \left( \bigwedge_{i=1}^n p_i \right) \equiv \bigvee_{i=1}^n \neg p_i$$

Enfin, la règle affirmant que "la négation de la négation coïncide avec l'original" (au sens où l'on aura toujours  $\neg(\neg p) \equiv p$ ) est parfois considérée comme une 3ème loi de De Morgan.

### 2.1.3 Quelques notations alternatives

Voici donc un aperçu des principaux systèmes de notation utilisés en Logique Formelle :

- La **notation infixe** est celle que nous avons utilisée jusqu'à présent : les signes  $\wedge$ ,  $\vee$  et  $\neg$  sont employés pour désigner respectivement des conjonctions, des disjonctions et des négations, et toutes sortes de délimiteurs (tels que  $(\dots)$ ,  $[\dots]$ ,  $\{\dots\}$ ) peuvent être employés. La proposition impossible se note **0** et la proposition certaine se note **1**. Enfin le signe  $\equiv$  est employé lorsque deux expressions logiques prennent systématiquement le même sens à chaque affectation des variables qui les constituent.
- A partir de la notation infixe, on passe à la **notation booléenne** en remplaçant les signes  $\wedge$ ,  $\vee$  et  $\neg$  respectivement par  $\cdot$ ,  $+$  et  $\bar{\phantom{x}}$ , et en convenant, comme en algèbre, d'effectuer les "produits" avant les "sommations" si une telle ambiguïté devait se présenter ; ainsi, par exemple, l'expression  $(p \wedge \neg q) \vee r$  s'écrira-t-elle  $p \cdot \bar{q} + r$  dans la notation booléenne ou même, plus simplement :  $p\bar{q} + r$ .  
Autres différences avec la notation infixe : dans la notation booléenne, les constantes logiques extrêmes sont notées 0 et 1, et le signe = est utilisé en lieu et place de  $\equiv$ .
- Pour passer de la notation infixe à la **notation arborescente**, on commencera par repérer la profondeur de chacun des signes (connecteur, délimiteur, variable ou constante logique) apparaissant dans une expression donnée sous la forme infixe. Un tel repérage s'effectue en numérotant cette liste de signes parcourue de gauche à droite, une parenthèse ouvrante donnant lieu à une augmentation d'un cran du numéro courant au signe suivant, tandis qu'une parenthèse fermante donne lieu à une diminution immédiate d'un cran dans cette numérotation (tout autre signe qu'un délimiteur ne donne pas lieu à un changement de numéro). Une telle numérotation des signes a l'avantage de permettre une vérification de ce que les délimiteurs ont été employés à bon escient : en effet, en faisant porter le numéro '0' au premier signe de l'expression logique, on doit retrouver le numéro '0' tout à la fin de l'expression ; en outre, à tout délimiteur ouvrant (parenthèse, crochet, accolade) doit correspondre un délimiteur fermant de même type et portant le même numéro. Dans ces conditions, dès lors que l'expression considérée comporte un ou plusieurs connecteurs, on rencontrera un seul et même connecteur au niveau le plus profond, c'est-à-dire au niveau

0. On peut alors commencer de tracer une arborescence logique en plaçant ce premier connecteur tout à gauche et en l'accompagnant de deux branches s'il s'agit d'une connexion binaire, ou encore de trois branches s'il s'agit d'une connexion ternaire, etc... Le connecteur le plus profond ayant été placé dans l'arborescence, on peut ensuite placer les signes de niveau plus élevé dans l'arborescence en agissant de même pour chacun des termes de cette première connexion.

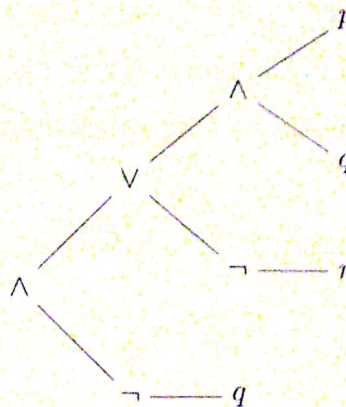
Voici tout de suite un premier exemple de passage à la notation arborescente : une expression logique  $e$  s'écrivant comme suit dans la notation infix

$$[(p \wedge q) \vee \neg r] \wedge \neg q$$

donne lieu à la numérotation

1	(	p	∧	q	)	∨	¬	r	)	∧	¬	q
0	1	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0

puis au tracé de l'arborescence logique en commençant par le (seul) connecteur portant le numéro '0'



- Enfin, le passage de la notation arborescente à la **notation préfixe** s'effectuera en veillant tout d'abord à ce que l'arborescence traitée ne comporte pas de connexion ternaire ou quaternaire, mais *seulement des connexions unaires ou binaires* ; en présence d'une disjonction ternaire telle que  $p \vee q \vee r$ , on pourra remplacer les trois branches correspondantes dans l'arborescence par deux séries de deux branches, en utilisant l'associativité de la disjonction.

Après s'être assuré que toutes les connexions de l'arborescence sont unaires ou binaires, on adopte un *Parcours en Profondeur D'Abord (PPDA)* pour en numérotter tous les sommets. La notation préfixe (ou "polonaise inversée") de l'expression logique d'origine s'obtient alors tout simplement en reproduisant tous les signes apparaissant à chacun des sommets de l'arborescence suivant leurs numéros dans le PPDA.

Exemple : reprendre l'arborescence ci-dessus qui représente l'expression  $e$  et numérotter les 9 sommets suivant un PPDA. On obtient alors la notation préfixe de l'expression  $e$

$$e \equiv \wedge \vee \wedge p q \neg r \neg q$$

Dans ce cours, c'est la notation infix qui sera privilégiée.

On a déjà constaté qu'une égalité en théorie des ensembles se traduit par l'emploi du signe  $\equiv$  dans la notation infix. Dans le même ordre d'idée, comment parviendra-t- à traduire une inclusion ? C'est ce que nous allons voir dans la suite de ce chapitre, en prenant la peine de définir quelques nouveaux connecteurs dans ce but.

## 2.2 Quelques connecteurs supplémentaires.

Définissons un nouveau connecteur binaire "Flèche", noté  $\rightarrow$  dans toute la suite, de la manière suivante : étant données deux variables logiques  $p$  et  $q$ , on pose

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Ce connecteur binaire va jouer un rôle important dans la suite, voyons donc quelques-unes de ses principales propriétés :

1°)  $\rightarrow$  n'est manifestement *pas commutatif*, il n'est *pas non plus associatif* !

On a en général  $p \rightarrow q \neq q \rightarrow p$ , ce qui se constate aisément au moyen d'un diagramme, ou encore sur quelques exemples extrêmes ; ainsi a-t-on, par exemple :  $0 \rightarrow 1 \equiv \neg 0 \vee 1 \equiv 1$ , tandis que  $1 \rightarrow 0 \equiv \neg 1 \vee 0 \equiv 0$ .

De même, le défaut d'associativité de  $\rightarrow$  (en général :  $(p \rightarrow q) \rightarrow r \neq p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ) se constate aisément sur un diagramme ensembliste, ou encore dans certains cas de figure extrêmes (on a, par exemple :  $(0 \rightarrow 1) \rightarrow 0 \equiv 1 \rightarrow 0 \equiv 0$ , tandis que  $0 \rightarrow (1 \rightarrow 0) \equiv \neg 0 \vee (\neg 1 \vee 0) \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$ ).

2°) *Règles de simplification* : on aura toujours

$$(p \rightarrow 0) \equiv \neg p, (p \rightarrow 1) \equiv 1, (0 \rightarrow p) \equiv 1, (1 \rightarrow p) \equiv p,$$

mais aussi

$$(p \rightarrow p) \equiv 1, (p \rightarrow \neg p) \equiv \neg p, \neg(p \rightarrow p) \equiv p,$$

et

$$p \rightarrow (p \rightarrow q) \equiv (p \rightarrow q), p \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv 1, (p \rightarrow q) \rightarrow p \equiv p, (q \rightarrow p) \rightarrow p \equiv q \vee p$$

3°) *Règles de contraposition* : on aura toujours

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p),$$

ce qui se vérifie aisément en appliquant les Lois de De Morgan :

$$(\neg q \rightarrow \neg p) \equiv \neg(\neg q) \vee \neg p \equiv \neg p \vee q \equiv (p \rightarrow q)$$

A partir de ce nouveau connecteur binaire, d'autres connecteurs utiles peuvent encore être définis, par exemple le connecteur "Double Flèche", donné par

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p),$$

ou encore le connecteur "Non-Flèche", donné par

$$p \not\rightarrow q \equiv \neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

Nous examinerons de plus près quelques-unes des propriétés de ces connecteurs dans les exercices situés en fin de chapitre. Dans l'immédiat, voyons comment le connecteur  $\rightarrow$  peut être utilisé afin de définir un nouveau type de comparaison logique.

## 2.3 Comparaisons d'expressions logiques.

Dans un contexte ensembliste, l'égalité de deux sous-ensembles de l'univers  $\Omega$  se note au moyen du signe  $=$ , auquel correspond le signe  $\equiv$  en Logique Formelle, comparateur utilisé dans la notation infixée pour signifier que deux expressions logiques sont équivalentes.

A présent, notre but est de définir un nouveau type de comparaisons entre expressions logiques, la "**Conséquence Logique**", notée au moyen du signe  $\models$  dans la notation infixée, et jouant un rôle parfaitement analogue à celui de l'inclusion en Théorie des Ensembles.

Observons que, pour deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  de l'univers  $\Omega$ ,

$$\text{affirmer que } A \subset B \text{ revient à affirmer que } \bar{A} \cup B = \Omega$$

Cette simple remarque justifie les définitions fondamentales suivantes.

**Définition :** on dira que l'expression logique  $e$  constitue

- une *tautologie* si  $e \equiv 1$
- une *antilogie* si  $e \equiv 0$ .

**Exemples.** Voici quelques exemples particulièrement simples de tautologies et d'antilogies :

$$p \vee \neg p \equiv 1, p \wedge \neg p \equiv 0, p \rightarrow p \equiv 1$$

Les exemples suivants sont un peu plus élaborés (*entraînez-vous à vérifier!*) :

$$e \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) \equiv 1$$

tandis que

$$f \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (p \wedge \neg r) \equiv 0 \quad \text{et} \quad g \equiv (p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \wedge r) \equiv 0$$

Le fait que l'expression  $e$  soit une tautologie constitue une règle pour le connecteur  $\rightarrow$ , connue sous le nom de "*Règle d'Enchaînement*".

En gardant à l'esprit l'analogie ensembliste et la remarque formulée au début du paragraphe, on en vient à définir la **Conséquence Logique** de la façon suivante :

**Définition :** on dira que l'expression logique  $h$  a pour **conséquence logique**  $h'$ , et l'on écrira  $h \models h'$ , dès lors que  $(h \rightarrow h')$  est une tautologie, autrement dit dès lors que  $(h \rightarrow h') \equiv 1$ .

Ainsi pourra-t-on par exemple reformuler la *Règle d'Enchaînement* en écrivant que

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \models (p \rightarrow r)$$

Plus simplement, on pourra commencer par observer que

$$(p \wedge q) \models p, p \models (p \vee q), 0 \models p \text{ et } p \models 1$$

Efforçons-nous, dans toute la suite, de ne **JAMAIS CONFONDRE** la conséquence logique  $\models$  avec le connecteur  $\rightarrow$ . Certes, ces deux outils de la Logique Formelle sont liés, *mais ils ne sont pas de la même nature* :  $\models$  ne pourra jamais être pris pour un connecteur (de même que l'inclusion  $\subset$  ne pourra jamais être considérée comme un opérateur en Théorie des Ensembles).

Terminons ce paragraphe par un inventaire de quelques-unes des propriétés les plus utiles de la Conséquence Logique  $\models$  :

1. Rappelons que l'inclusion  $\subset$  définit une relation d'ordre sur l'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$  de tous les sous-ensembles de l'univers  $\Omega$ . De façon entièrement analogue, on pourra observer que la Conséquence Logique  $\models$  satisfait les propriétés de *Réflexivité*, d'*Antisymétrie* et de *Transitivité*, au sens suivant :

- *Réflexivité* : on aura toujours  $e \models e$ .
- *Antisymétrie* : dès lors que  $e \models e'$  et  $e' \models e$ , on a en fait  $e \equiv e'$ .
- *Transitivité* : dès lors que  $e \models e'$  et  $e' \models e''$ , on aura aussi  $e \models e''$ .

2. *Règle d'Enchaînement* : on aura toujours  $[(e \rightarrow e') \wedge (e' \rightarrow e'')] \models (e \rightarrow e'')$ .

3. *Syllogismes* : on aura toujours  $[e \wedge (e \rightarrow e')] \models e'$ .

4. *Règles Élémentaires* : on aura toujours

$$(e \wedge f) \models e \models (e \vee g) \quad \text{et} \quad 0 \models e \models 1$$

En outre, dès lors que  $e \models e'$  et  $f \models f'$ , on pourra aussi écrire que

$$(e \wedge f) \models (e' \wedge f') \quad \text{et} \quad (e \vee f) \models (e' \vee f')$$

## 2.4 Exercices

**Exercice 13 : Expressions logiques et langage courant.** Supposons que l'on attribue à la variable logique  $p$  le sens "*Pierre aime Marie*" et à la variable logique  $q$  le sens "*Marie aime Pierre*".

1. Donner un énoncé en langage courant correspondant aux propositions ci-dessous :

$$\neg p \wedge q ; \quad \neg(p \vee q) ; \quad \neg(p \wedge q)$$

2. Réciproquement, transcrire dans la notation logique infixée chacune des propositions suivantes :

*Pierre et Marie s'aiment l'un l'autre ; Pierre et Marie ne s'aiment ni l'un ni l'autre ; Pierre aime Marie, mais Marie ne le lui rend pas ; Il est faux que Pierre aime Marie et n'en soit pas aimé.*

**Exercice 14 : Simplification d'expressions logiques.** Trouver une expression logique "plus simple" de chacune des expressions ci-dessous. Par "plus simple", on entend une expression contenant moins de caractères.

- $e \equiv \neg(\neg p \wedge (\neg q \vee p))$
- $e' \equiv \neg(\neg p \vee (\neg q \wedge p))$
- $e'' \equiv \neg((\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r))$

**Exercice 15 : Changements de notation.**

1. *Expression donnée sous forme infixée* : considérons l'expression  $e$  donnée sous forme infixée par

$$e \equiv [(p \wedge \neg q) \vee r] \wedge [\neg s \vee q]$$

En donner successivement

- (i) l'interprétation ensembliste (par un diagramme de Venn ou de Karnaugh)
  - (ii) la notation booléenne
  - (iii) la notation en arborescence logique
  - (iv) la notation préfixe
2. *Expression donnée sous forme infixe* : reprendre ces mêmes questions à partir de l'expression  $e'$  donnée sous forme infixe par

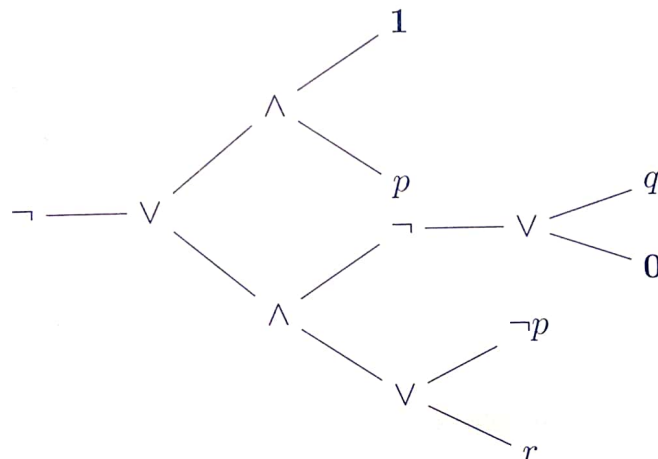
$$e' \equiv \neg \{ [p \wedge \neg(q \wedge s)] \vee r \vee \neg s \} \wedge (\neg s \vee q) \wedge p$$

3. *Expression donnée sous forme préfixe* : considérons l'expression  $e''$  donnée sous forme préfixe par

$$e'' \equiv \neg \vee \wedge q \neg \vee r p \neg \vee \neg p \wedge r s$$

Donner l'arborescence logique associée à  $e''$ , puis les notations infixe et booléenne correspondantes, puis une interprétation ensembliste aussi simple que possible (par un diagramme de Karnaugh).

4. *Arborescences logiques* : on considère à présent l'expression  $a$  donnée par l'arborescence logique ci-dessous :



A partir de cette arborescence, donner l'écriture préfixe puis l'écriture infixe de  $a$ . Simplifier  $a$ .

5. *Un dernier exemple* : on considère enfin l'expression  $b$  donnée par

$$b \equiv (p \vee \neg(q \vee (r \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge 0))) \wedge \neg p \wedge q \wedge (1 \vee \neg s)$$

Structurer cette expression en notant la profondeur de chacun de ses caractères, puis représenter  $b$  en arborescence logique ; donner ensuite une écriture préfixe pour  $b$ .

### Exercice 16 : Deux autres exemples d'arborescence.

1. Soit  $e$  l'expression donnée par l'arborescence logique ci-dessous :



- Mêmes questions pour le connecteur  $\nrightarrow$ .
- Vérifier que  $\leftrightarrow$  est à la fois commutatif et associatif, et que

$$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

(autrement dit :  $(p \leftrightarrow q \leftrightarrow r)$  est vrai lorsque  $p, q$  et  $r$  sont toutes trois vraies, ou encore lorsque deux d'entre elles sont fausses et la troisième vraie).

- $\leftrightarrow$  est-il distributif par rapport à  $\wedge$  ? Par rapport à  $\vee$  ?
- Etudier similairement le connecteur  $\nleftrightarrow$ .

**Exercice 18 : Découverte d'une conséquence logique.** On considère l'expression logique  $e$  donnée par

$$e \equiv \{p \vee \neg[(r \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge \mathbf{0}) \vee q]\} \wedge \neg p \wedge q \wedge (\mathbf{1} \vee \neg s)$$

- Simplifier cette expression en utilisant les règles usuelles du calcul logique.
- S'agit-il d'une tautologie ? D'une antilogie ?
- Utiliser ce qui précède pour prouver que

$$\{p \vee \neg[(r \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge \mathbf{0}) \vee q]\} \models [p \vee \neg q \vee \neg(\mathbf{1} \vee \neg s)]$$

**Exercice 19 : A la découverte du connecteur de Shannon.** Le connecteur de Shannon est un connecteur ternaire qui peut être défini à travers la formule

$$Sha(p, q, r) \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

- Simplifier successivement

$$Sha(\mathbf{0}, q, r), Sha(\mathbf{1}, q, r), Sha(p, q, q), Sha(p, \mathbf{0}, \mathbf{0}), Sha(p, \mathbf{1}, \mathbf{1}), Sha(p, \mathbf{0}, \mathbf{1}), Sha(p, \mathbf{1}, \mathbf{0})$$

- En se référant au système de connecteurs  $\{\neg; Sha\}$ , trouver des expressions équivalentes pour

$$(p \vee q), (p \rightarrow q), (p \nrightarrow q), (p \leftrightarrow q), (p \nleftrightarrow q)$$

## 3 ETUDES de FONCTIONS LOGIQUES

### 3.1 Des expressions aux fonctions logiques.

En Logique Formelle, l'utilisation d'expressions logiques permet de définir des *fonctions logiques*. Les fonctions logiques que nous allons étudier dépendront, en général, de plusieurs variables *simultanément*. Il conviendra donc de prêter attention à l'ordre d'apparition des variables concernant l'argument de la fonction logique étudiée. Par ailleurs, il se pourra tout à fait que certaines de ces variables n'apparaissent pas effectivement dans une expression logique permettant de définir la fonction étudiée : on parle alors de variable indifférente. En revanche, les noms donnés à ces variables n'ont, quant à eux, pas grande importance.

Voici donc quelques premiers exemples de fonctions logiques : soient  $f, g, h$  les fonctions logiques données par

$$f(p, q) \equiv p \rightarrow q, \quad g(a, b) \equiv \neg(a \wedge \neg b) \quad \text{et} \quad h(p, q, r) \equiv \neg p \vee q$$

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont identiques (cf Lois de De Morgan), tandis que  $f$  et  $h$  ne le sont pas, contrairement aux apparences :  $f$  est une fonction de deux variables seulement, alors que  $h$  dépend (formellement) de trois variables.

Dans un tel contexte, les "variations" de nos fonctions logiques pourront être étudiées au moyen d'une *Table de Vérité* (TdV) ou encore en utilisant un *Diagramme de Vérité* (DdV), ces deux types d'objets s'apparentant aux *Tableaux de Variation* et *Graphes* attachés à nos fonctions d'une variable réelle.

Si  $f$  est une fonction dépendant des  $n$  variables logiques  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , il s'agira, dans un cas (TdV) comme dans l'autre (DdV), de considérer les  $2^n$  manières d'affecter certaines des variables de  $f$  à la valeur 0 et toutes les autres à la valeur 1, et de calculer la valeur prise par  $f$  dans chacun de ces cas. La TdV d'une telle fonction  $f$  comportera donc  $2^n$  lignes, correspondant à chacune des suites binaires de longueur  $n$  envisageables, et  $(n+1)$  colonnes, les  $n$  premières colonnes correspondant aux affectations de chacune des variables et la dernière aux valeurs obtenues pour  $f$ .

Le DdV de cette même fonction  $f$  constitue, quant à lui, une représentation graphique de ses variations sous la forme d'un "arbre" dont toutes les ramifications sont binaires ; on trouvera une première ramification binaire à la racine de cet arbre, constituée d'une branche descendante (dessinée à trait plein) symbolisant une affectation de la 1ère variable  $p_1$  à 1, et d'une branche ascendante (dessinée à trait tillé) symbolisant une affectation de la 1ère variable  $p_1$  à 0. Deux telles ramifications binaires sont reproduites aux extrémités des deux premières branches, pour symboliser des affectations de la 2nde variable  $p_2$  dans chacun des deux cas d'affectation de la variable  $p_1$ , et ainsi de suite ... De telles ramifications binaires sont enfin reproduites aux  $2^{n-1}$  sommets représentant toutes les affectations possibles de  $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$ , pour figurer les deux affectations possibles de la dernière variable  $p_n$  dans chacune de ces situations. Tout au bout de cet arbre, on trouve enfin, en guise de "feuilles", des valeurs binaires (0 ou 1) correspondant aux valeurs prises par  $f$  dans chacun de ces  $2^n$  cas.

Chacune des lignes de la TdV associée à une fonction  $f$  correspond donc à un chemin allant de la racine du DdV jusqu'à l'une de ses feuilles.

Considérons par exemple les fonctions de trois variables  $f$  et  $g$  données par

$$f(p, q, r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r \quad \text{et} \quad g(p, q, r) \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Puisque ces deux fonctions dépendent d'un même nombre de variables logiques, on pourra étudier leurs variations en parallèle. Nous obtenons ainsi les TdV simultanées de  $f$  et  $g$ :

$p$	$q$	$r$	$f(p, q, r)$	$g(p, q, r)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Une comparaison des TdV de  $f$  et de  $g$  permet de retrouver en un coup d'oeil le défaut d'associativité du connecteur  $\rightarrow$  :  $f$  et  $g$  sont bien deux fonctions distinctes, puisqu'elles produisent parfois (voir les lignes 1 et 3 du TdV) deux valeurs différentes pour une même affectation de leurs variables.

On parvient même à retrouver une conséquence logique connue, à savoir

$$[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \models [p \rightarrow (q \rightarrow r)],$$

en observant que les valeurs logiques produites par  $f$  sont systématiquement "plus petites" que celles produites par  $g$  ; autrement dit, dans toute situation où  $f$  prend la valeur 1,  $g$  prend elle aussi la valeur 1.

TdV ou DdV constituent donc des outils pratiques permettant de vérifier la validité d'une Formule Logique. Cependant ces outils classiques, utilisés sans aucun recul, s'avèrent bien trop encombrants pour être réellement pratiques dès que  $n$  grandit :  $2^n$  croît beaucoup trop rapidement en fonction de  $n$ . Dans les paragraphes qui suivent, nous verrons des méthodes classiques de "condensation" pour de telles Tables ou Diagrammes de Vérité.

### 3.2 Condensation des Tables de Vérité : l'Algorithme de Quine

Considérons une fonction  $f$  dépendant de trois variables logiques, et supposons que la dernière variable s'avère indifférente dans  $f$  lorsque les deux premières sont affectées respectivement à 0 et 1, au sens où

$$f(0, 1, 0) \equiv f(0, 1, 1) \equiv 1$$

Les deux équivalences ci-dessus correspondent à deux lignes distinctes dans la TdV de  $f$  :

0	1	0	1
0	1	1	1

Cependant, puisque la troisième variable est ici "localement indifférente", on aurait pu gagner de la place en choisissant de condenser ces deux lignes en une seule pour écrire plutôt :

0	1	•	1
---	---	---	---

L'algorithme de Quine vise à utiliser autant que faire se peut de telles "indifférences locales" pour condenser au maximum la TdV de la fonction  $f$  ; le principe en est très simple et repose sur l'observation suivante : si la fonction  $f$  dépend de  $n$  variables, on aura (*Identité de Shannon*)

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge f_{0 \leftarrow p_1}(p_2, p_3, \dots, p_n)) \vee (p_1 \wedge f_{1 \leftarrow p_1}(p_2, p_3, \dots, p_n)),$$

$f_{0 \leftarrow p_1}$  (respectivement  $f_{1 \leftarrow p_1}$ ) désignant ici la fonction de  $(n - 1)$  variables obtenue à partir de  $f$  en remplaçant la première variable  $p_1$  par 0 (resp. par 1). Ce procédé de décomposition peut être itéré, en sorte que, par exemple :

$$f_{0 \leftarrow p_1}(p_2, p_3, \dots, p_n) \equiv (\neg p_2 \wedge f_{0 \leftarrow p_1, 0 \leftarrow p_2}(p_3, \dots, p_n)) \vee (p_2 \wedge f_{0 \leftarrow p_1, 1 \leftarrow p_2}(p_3, \dots, p_n))$$

Après  $k$  itérations, on constatera éventuellement que l'une des fonctions de  $(n - k)$  variables obtenue est en fait constante, ce qui permettra de condenser  $2^{n-k}$  lignes dans la TdV de  $f$ .

Voici une description plus précise de l'ALGORITHME DE QUINE.

1. INITIALISATION : on dispose d'une formule initiale définissant la fonction logique  $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , formule ne contenant que des connecteurs élémentaires ( $\neg, \wedge, \vee$ ).
2. PAS GENERAL : soit  $(F)$  la formule logique produite au pas précédent.
  - Cas 1 : le second membre de la formule  $(F)$  n'est pas une constante logique. On recherche alors  $x$ , variable de plus petit indice figurant dans ce second membre. On affecte  $x$  à la valeur 0, puis on simplifie le second membre de  $(F)$  suite à cette affectation. On écrit la nouvelle formule logique qui se déduit de  $(F)$  en remplaçant  $x$  par 0 dans le premier membre et en reportant dans le second membre l'expression simplifiée correspondante.
  - Cas 2 : le second membre de la formule  $(F)$  est une constante logique. On recherche alors  $y$ , dernière variable fixée à 0 dans  $(F)$ . On recherche la formule  $(G)$  produite juste avant cette affectation de  $y$  à 0. On affecte  $y$  à 1 dans  $(G)$ , et on simplifie  $(G)$  suite à cette affectation. On écrit la nouvelle formule logique qui se déduit de  $(G)$  en remplaçant  $y$  par 1 dans le premier membre de  $(G)$  et en reportant dans le second membre l'expression simplifiée correspondante.
3. ARRET : cet algorithme prend fin lorsqu'on se trouve dans le Cas 2 et que toutes les variables affectées sont affectées à 1.

Avant de passer à un 1er exemple, précisons que les seules simplifications connues de nos machines sont les suivantes :  $x \wedge \neg x \equiv 0$  ;  $x \vee \neg x \equiv 1$  ainsi que

$$0 \wedge x \equiv x \wedge 0 \equiv 0 ; 1 \wedge x \equiv x \wedge 1 \equiv x ; 0 \vee x \equiv x \vee 0 \equiv x ; 1 \vee x \equiv x \vee 1 \equiv 1 ;$$

Voyons par exemple comment cet algorithme permet d'élaborer une TdV condensée pour la fonction de trois variables  $f$  donnée par :  $f(p, q, r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r$ .

pas	loc	$p$	$q$	$r$	cas	
0		$f(p, q, r) \equiv (p \wedge \neg q) \vee r$				
1	0	$f(0, q, r) \equiv r$			1	
2	1				1	
3	1				$f(0, q, 0) \equiv 0$	2
4	0				$f(0, q, 1) \equiv 1$	2
5	4	$f(1, q, r) \equiv \neg q \vee r$				1
6	4				$f(1, 0, r) \equiv 1$	2
7	6				$f(1, 1, r) \equiv r$	2
8	6				$f(1, 1, 0) \equiv 0$	2
					$f(1, 1, 1) \equiv 1$	2/STOP

Dans le tableau ci-dessus, la colonne "loc" contient la localisation, c'est-à-dire l'indication du numéro de pas où se trouve la formule utilisée.

On obtient ainsi la TdV condensée suivante pour  $f$ , en ne gardant que les formules logiques dont le second membre est une constante logique :

$p$	$q$	$r$	$f(p, q, r)$
0	•	0	0
0	•	1	1
1	0	•	1
1	1	0	0
1	1	1	1

En comparaison avec la TdV *complète* obtenue précédemment pour cette même fonction, le gain est ici de trois lignes (sur un total de huit lignes).

### 3.3 Décompositions canoniques, décompositions normales

Convenons d'appeler **Forme Normale Disjonctive** (FND) à  $n$  variables  $p_1, p_2, \dots, p_n$  toute expression constituée d'une *disjonction de conjonctions* où chacune des conjonctions fait apparaître *au plus une fois* chacune des variables  $p_i$ , telle quelle ou niée.

On pourra trouver moult FND permettant de définir une même fonction logique  $f$  ; ainsi a-t-on, pour la fonction de trois variables  $f$  définie par  $f(p, q, r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r$  :

$$\begin{aligned} f(p, q, r) &\equiv (p \wedge \neg q) \vee r \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\ &\equiv (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \end{aligned}$$

Le dernier terme de cette chaîne d'équivalences constitue toutefois un cas bien particulier de (FND) : il est constitué d'une disjonction de conjonctions où *chacune des conjonctions utilisées fait apparaître toutes les variables de  $f$* , telles quelles ou niées ; ce dernier type de conjonction est appelé **Min-Terme** et correspond à une "case élémentaire" en termes de diagrammes de Karnaugh ; dans le cas particulier où notre Forme Normale Disjonctive est constituée d'une disjonction de Min-Terms, on parlera de **Forme Canonique Disjonctive** (FCD).

Un instant de méditation quant aux paragraphes précédents permettra de constater que toute fonction logique  $f$  admet *une et une seule* FCD, et que celle-ci pourra s'obtenir en répertoriant tous les chemins allant, dans le DdV de  $f$ , de la racine à l'une des feuilles étiquetées **1** ; de manière équivalente, on pourra tout aussi bien repérer chacune des lignes se terminant par un **1** dans la TdV de la fonction  $f$  : une telle ligne correspond en effet à un Min-Terme figurant dans la FCD de  $f$ .

Considérons le deuxième exemple fourni par la fonction  $g$  telle que  $g(p, q, r) \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$ . Quelques efforts de calcul permettent cette fois de trouver les FND suivantes pour  $g$  :

$$\begin{aligned} g(p, q, r) &\equiv \neg p \vee r \vee (p \wedge \neg q) \\ &\equiv \neg p \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \end{aligned}$$

Quant à la FCD de  $g$ , elle est donnée par

$$g(p, q, r) \equiv (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

On constate alors que chacun des Min-Terms apparaissant dans la FCD de  $f$  apparaît aussi dans celle de  $g$ , ce qui permet de retrouver une conséquence logique connue, à savoir

$$f(p, q, r) \models g(p, q, r), \text{ soit } [(p \rightarrow q) \rightarrow r] \models [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

Observons enfin qu'une application judicieuse des Lois de De Morgan nous aurait permis d'exprimer  $f$  ou  $g$  tout aussi bien comme *conjonctions de disjonctions* !

Ainsi pourra-t-on commencer par voir, par exemple, que les seuls Min-Terms n'apparaissant pas dans la FCD de  $f$  sont  $(p \wedge q \wedge \neg r)$ ,  $(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$  et  $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ . On a donc tout aussi bien :

$$f(p, q, r) \equiv \neg [(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)] ,$$

puis, en appliquant les lois de De Morgan :

$$f(p, q, r) \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r),$$

ce qui constitue une présentation de  $f$  au moyen de sa **Forme Canonique Conjonctive**, c'est à dire comme **conjonction de Max-Terms**, un Max-Terme étant, bien entendu, la négation d'un Min-Terme, c'est à dire une disjonction faisant apparaître chacune des variables une fois exactement (telle quelle ou niée).

Plus généralement, toute présentation de  $\neg f(p, q, r)$  au moyen d'une FND conduirait, par application des Lois de De Morgan, à expression de  $f$  sous une **Forme Normale Conjonctive** (conjonction de disjonctions).

Pour la fonction  $g$ , on obtient tout simplement la Forme Canonique Conjonctive

$$g(p, q, r) \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

### 3.4 Exercices

**Exercice 20 : Quelques Tables de Vérité.** Rechercher les TdV des fonctions  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  définies respectivement par

1.  $f_1(p, q) \equiv (q \vee p) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$
2.  $f_2(p, q, r) \equiv (q \vee p) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$
3.  $f_3(p, q, r) \equiv (q \leftrightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$
4.  $f_4(p, q, r) \equiv (q \rightarrow p) \rightarrow \{(p \rightarrow \neg r) \rightarrow (\neg r \rightarrow q)\}$
5.  $f_5(p, q, r) \equiv \{p \rightarrow (q \rightarrow r)\} \rightarrow \{q \rightarrow (p \rightarrow r)\}$

**Exercice 21 : Une première application de l'Algorithme de Quine.** Soit  $f$  la fonction de 4 variables donnée par

$$f(p, q, r, s) \equiv [(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee s] \wedge [((\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee q)) \vee (\neg s)]$$

1. Appliquer l'Algorithme de Quine afin de trouver une TdV condensée de  $f$ .
2. En déduire une nouvelle expression de  $f$  comme disjonction de conjonctions.

**Exercice 22 : Etablissement d'une conséquence logique par l'Algorithme de Quine.** Le but de cet exercice est d'établir la validité de la conséquence logique

$$\{r \rightarrow (\neg q \vee s)\} \wedge \{(q \vee p) \rightarrow (r \vee p)\} \wedge [\neg q \rightarrow s] \wedge [s \rightarrow p] \models p$$

1. Traduire cette conséquence logique en une antilogie de forme simple (ne faisant intervenir que les connecteurs classiques  $\wedge, \vee, \neg$ , ce dernier ne portant que sur des variables logiques).
2. Appliquer l'algorithme de Quine afin de vérifier la validité de cette antilogie.
3. Retrouver cette antilogie en utilisant le calcul propositionnel.
4. Retrouver la conséquence logique annoncée initialement en utilisant des diagrammes de Karnaugh.

**Exercice 23 : Trois autres conséquences logiques.** Etablir, par la méthode de votre choix, la validité des conséquences logiques suivantes :

1.  $\{q \rightarrow (p \vee r)\} \wedge (p \rightarrow r) \wedge \{\neg p \rightarrow (q \vee s)\} \wedge (r \rightarrow s) \models s$
2.  $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \models r$
3.  $\{[(r \rightarrow q) \wedge p] \vee (q \rightarrow p)\} \models (p \vee \neg q)$

Ecrire les expressions logiques rencontrées ci-dessus sous leur Forme Canonique Disjonctive.