UNIVERSITÉ
PARIS
DESCARTES

IUT

DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

Date de l'épreuve : 18/04/18

Année : 1 **Groupe :** 109

Écrire très lisiblement

NOM : APOSTOLET (en capitales)

Prénom : Azurine

NOTE DE 0 À 20	APPRÉCIATIONS
	5 + 8 + 2.5 + 2 = 17.5

Ne rien écrire dans cette marge

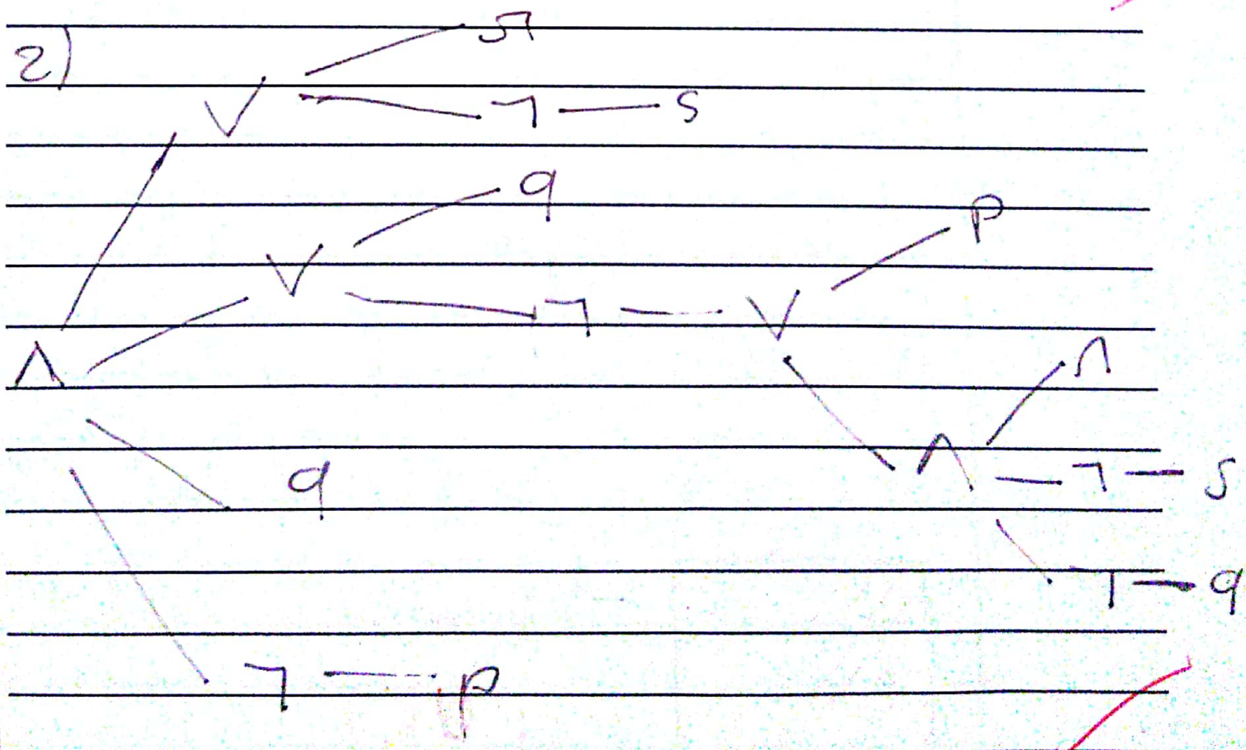
Exercice 1

1)

$c = \{q \vee \neg[p \vee (r \wedge \neg s \wedge \neg q)]\} \wedge \neg p \wedge q \wedge (r \vee \neg s)$

1 1 1 2 2 3 3 3 3 3 3 2 1 0 0 0 0 1 1 1 1

2)



3)

$e' \equiv [r \vee (p \wedge q)] \wedge (p \vee \neg q) \wedge [q \vee (p \wedge \neg q)]$

Exercice 2

PARTIE 1

1)

$f(p,q,r,s) \equiv [(\bar{Q} \cap S) \cup R] \cap [\bar{P} \cup Q \cup \bar{R}] \cap [Q \cup R]$

2)

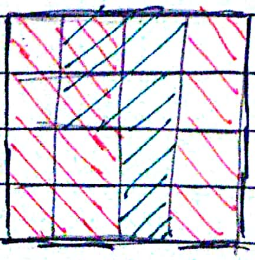
3)

$f(p,q,r,s) \equiv (P \cap Q \cap R \cap \bar{S}) \cup (\bar{P} \cap Q \cap R \cap \bar{S}) \cup (P \cap Q \cap R \cap S) \cup (\bar{P} \cap Q \cap R \cap S) \cup (\bar{P} \cap \bar{Q} \cap R \cap S) \cup (\bar{P} \cap \bar{Q} \cap R \cap \bar{S})$

4) $(\neg p \wedge r) \models f(p,q,r,s)$ ssi $(\neg p \wedge r) \rightarrow f(p,q,r,s) \equiv 1$

donc $\neg(\neg p \wedge r) \vee f(p,q,r,s) \equiv 1$

donc $(p \vee \neg r) \vee f(p,q,r,s) \equiv 1$



- $f(p,q,r,s)$ (d'après le 1er diagramme)
- $(P \cup \bar{R})$
- $f(p,q,r,s) \cup (P \cup \bar{R})$

On voit bien que $f(p,q,r,s) \vee (p \vee \overline{r}) \equiv 1$
donc $f(p,q,r,s) \vee (p \vee \neg r) \equiv 1$
donc $(\neg p \wedge r) \rightarrow f(p,q,r,s) \equiv 1$ (tautologie)
donc on a bien :
$(\neg p \wedge r) \vDash f(p,q,r,s)$

PARTIE 2

5)

$e \equiv (\neg p \wedge r) \rightarrow \{[(\neg q \wedge s) \vee r] \wedge [\neg p \vee q \vee \neg r] \wedge [q \vee r]\}$

$e \equiv \neg(\neg p \wedge r) \vee \{[(\neg q \wedge s) \vee r] \wedge [\neg p \vee q \vee \neg r] \wedge [q \vee r]\}$

$e \equiv [(p \vee \neg r) \vee r \vee (\neg q \wedge s)] \wedge [(p \vee \neg r) \vee (\neg p \vee q \vee \neg r)] \wedge$
$[(p \vee \neg r) \vee (q \vee r)]$

$e \equiv (p \vee \neg r \vee r \vee (\neg q \wedge s)) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg p \vee q \vee \neg r) \wedge$
$(p \vee \neg r \vee q \vee r)$

$e \equiv (p \vee \neg r \vee r \vee \neg q \wedge p \vee \neg r \vee r \vee s) \wedge$
$(1 \vee \neg r \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (1 \vee \neg r \vee q)$

$e \equiv (p \vee 1 \vee \neg q \wedge p \vee 1 \vee s) \wedge (1) \wedge (1)$

$e \equiv (1 \wedge 1)$
$e \equiv 1$

Donc e est une tautologie

6) D'après ⑤ $(\neg p \wedge r) \rightarrow f(p,q,r,s) \equiv 1$.
C'est donc une tautologie.
Donc on a bien
$(\neg p \wedge r) \models f(p,q,r,s)$

PARTIE 3

7) /

8) La table de vérité condensée de $f(p,q,r,s)$ est :

p	q	r	s	f(p,q,r,s)
0	0	0	•	0
0	1	0	•	0
0	1	1	•	1
1	0	0	•	0
1	0	1	•	1
1	1	1	•	1

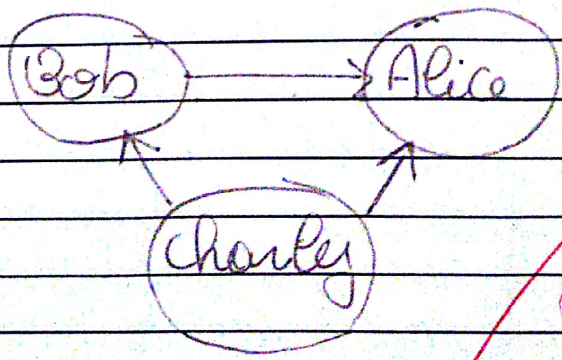
1|1,|0|•? non représenté

Comment l'alg avec Mc Quine

Exercice 3

/

Exercice 4



TB

NOM LEPOSTOLET ……………… PRENOM Arsène …… GROUPE 10

IUT Paris Descartes

DUT Informatique - S1

DST de MATHS DISCRÈTES (Logique Formelle) - janvier 2018

durée : 2 heures

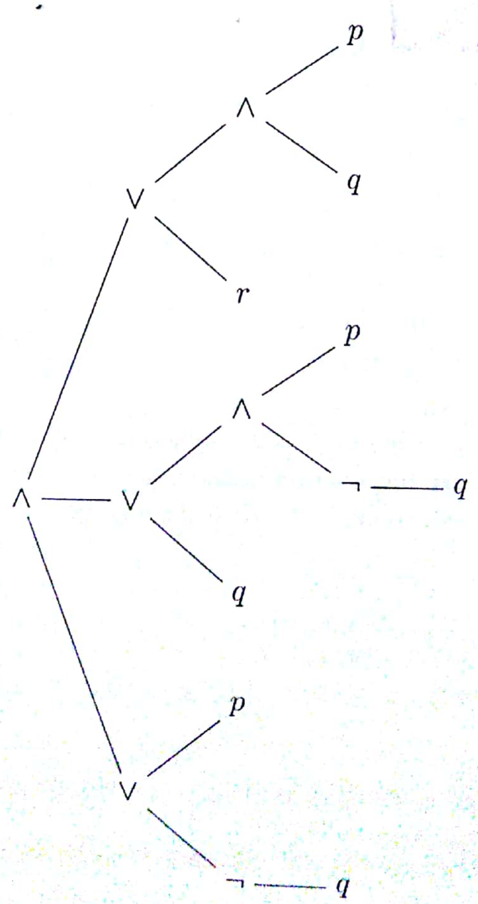
sans calculatrice - sans document - sans téléphone ni autre objet connecté

Le sujet comporte 4 exercices. Vous répondrez directement sur les feuilles du sujet pour certaines questions de l'exercice 2 et pour l'exercice 3. Vous n'oublierez donc pas de rendre le sujet en indiquant votre nom et prénom dans les en-têtes!
Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la justification des résultats demandés. Une réponse correcte sans justification pourra ne rapporter aucun point. Pensez à détailler les calculs sans chercher à économiser le papier!

Exercice 1 (*~ 5 points*). Soit e l'expression logique donnée dans la notation infixe par

$$e \equiv \{q \vee \neg [p \vee (r \wedge \neg s \wedge \neg q)]\} \wedge \neg p \wedge q \wedge (r \vee \neg s)$$

1. Repérer les niveaux de profondeur des différents symboles (délimiteurs, connecteurs, variables) apparaissant dans e.
2. En déduire une nouvelle présentation de cette expression sous la forme d'une arborescence logique.
3. On définit l'expression logique e' par son arborescence dessinée ci-dessous. Ecrire e' en notation infixe.



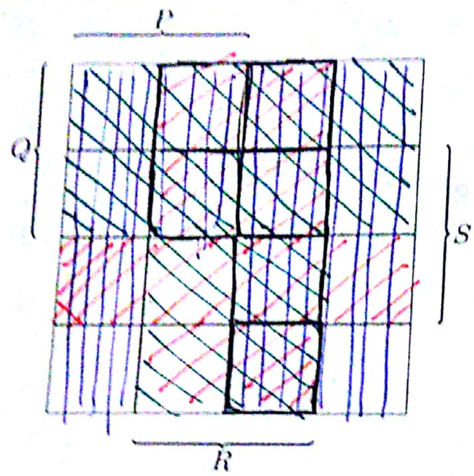
Exercice 2 (≃ *10 points*). *Les trois parties de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix.*
Rappel: le connecteur "flèche" est défini par $p \to q \equiv \neg p \vee q$

On s'intéresse à la fonction logique f donnée par

$$f(p,q,r,s) \equiv [(\neg q \wedge s) \vee r] \wedge [\neg p \vee q \vee \neg r] \wedge [q \vee r]$$

Partie I

1. En associant aux variables logiques p, q, r, s des sous-ensembles P, Q, R, S de l'univers Ω, traduire le calcul de $f(p,q,r,s)$ par un calcul ensembliste. (*On ne cherchera pas à s'implifier l'expression de $f(p,q,r,s)$.*)
2. Représenter ce calcul ensembliste par un diagramme de Karnaugh en complétant le graphique ci-dessous, sans oublier la légende !



— $Q \cup R$
— $(\overline{Q} \cap S) \cup R$
— $\overline{P} \cup Q \cup \overline{R}$
□ $[(\overline{Q} \cap S) \cup R] \cap [\overline{P} \cup Q \cup \overline{R}] \cap [Q \cup R]$

3. Utiliser ce diagramme de Karnaugh pour représenter $f(p,q,r,s)$ sous la forme d'une disjonction de conjonctions (*on obtiendra ici une disjonction à 6 min-termes*).
4. Utiliser une nouvelle fois ce diagramme de Karnaugh pour montrer que $(\neg p \wedge r) \models f(p,q,r,s)$.

Partie II

5. Simplifier l'expression logique $e \equiv (\neg p \wedge r) \to f(p,q,r,s)$. (*Ne pas simplifier l'expression de $f(p,q,r,s)$ mais utiliser la distributivité de $\vee$ sur $\wedge$.*)
6. Déduire de la question 5. que $(\neg p \wedge r) \models f(p,q,r,s)$.

Partie III

7. Appliquer l'Algorithme de Quine à la fonction f. *Vous présenterez l'algorithme de Quine en complétant le tableau de la page suivante.*
8. A partir de la question précédente, dresser une table de vérité condensée pour la fonction f.

NOM APOSTOLET .... PRENOM [illegible] .... GROUPE 109

pas	loc	p	q	r	s	cas
0		$f(p,q,r,s) \equiv [(\neg q \wedge s) \vee r] \wedge [\neg p \vee q \vee \neg r] \wedge [q \vee r]$				
1	0	$f(0,q,r,s) = [(\neg q \wedge s) \vee r] \wedge [q \vee r]$				1
2	1		$f(0,0,r,s) = (s \vee r) \wedge r$		1	1
3	2			$f(0,0,0,s) = 0$		2
4	2			$f(0,0,1,s) = \cancel{0}\ 1$		1
5	0		$f(0,1,r,s) = r$			1
6	5			$f(0,1,0,s) = 0$		2
7	6			$f(0,1,1,s) = 1$		2
8	0	$f(1,q,r,s) = [(\neg q \wedge s) \vee r] \wedge [q \vee \neg r] \wedge [q \vee r]$				1
9	8		$f(1,0,r,s) = (s \vee r) \wedge \neg r \wedge r \equiv 0$			1
10	9			$f(1,0,0,s) = 0$		2
11	10			$\cancel{f(1,0,1,s) = 1}$		2
12	0		$f(1,1,r,s) = r$	$f(1,1,0,s)$		1
13	12			$f(1,1,1,s) = 1$		2

?

Algo non complet

NOM LAPOSTOLET .... PRENOM Arsène .... GROUPE 109

Exercice 3 (*~ 4 points*). Pour tout entier n positif, on note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble $\{1,2,\cdots,n\}$. Soit E l'ensemble des parties de $[\![1,7]\!]$. Par exemple, $\{1\}$ est un élément de E, de même que $\{1,7\}$ est un élément de E, ou encore $\emptyset$, $\{2,3,6\}$ et $[\![1,7]\!]$ sont des éléments de E.
On définit sur E la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par:

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A\cap[\![1,6]\!] = B\cap[\![1,6]\!].$$

Répondre directement sur cette feuille aux questions suivantes (*toute réponse juste rapporte les points correspondants, toute case fausse cochée fait perdre la moitié des points*).

1. Compléter par une phrase *en français* :
"deux parties sont en relation si et seulement si ...les éléments qui sont dans A et [1,6] sont les mêmes que ceux qui sont dans B et [1,6]

2. $\{1,2\}\,\mathcal{R}\,\{1,2,7\}$ ☒ Vrai ☐ Faux

3. $\emptyset\,\mathcal{R}\,\{6\}$ ☐ Vrai ☒ Faux

4. $\mathcal{R}$ est réflexive ☒ Vrai ☐ Faux car ...ARA : A∩[1,6] = A∩[1,6] est vrai...

5. $\mathcal{R}$ est symétrique ☒ Vrai ☐ Faux car ...ARB : A∩[1,6] = B∩[1,6] et BRA : B∩[1,6] = A∩[1,6] donc ARB = BRA

6. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ☒ Vrai ☐ Faux car ...~~Si A∩[1,6] = B∩[1,6] est vrai, alors A = B~~ ... Non !

7. Les éléments de la classe de $\{7\}$ pour la relation $\mathcal{R}$ sont (......) ....

8. Il y a ☐7 ☐8 ☒2^6 ☐2^7 classes d'équivalence différentes.

Exercice 4 (*~ 2 points*). En vous appuyant sur la conférence de Jean-Guy Mailly, modéliser et représenter l'argumentation suivante.

- Alice : Ah, l'Intelligence Artificielle, c'est l'avenir !
- Bob : Non, je ne pense pas. Moi, je crois au Big Data.
- Charly : Pas du tout, vous n'y êtes pas ! L'avenir, c'est le Deep Learning.