NOM ..RIFKI.................................. PRENOM ..Kenza.......... GROUPE ..110

IUT Paris Descartes **2016/2017**
DUT Informatique - S1 **Module MATHS DISCRÈTES**

DST de Logique Formelle - 17 janvier 2017

durée : 2 heures
sans calculatrice - sans document - sans téléphone ni autre objet connecté

Le sujet comporte 3 exercices. Vous répondrez directement sur les feuilles du sujet pour certaines questions de l'exercice 2 et pour l'exercice 3. Vous n'oublierez donc pas de rendre le sujet en indiquant votre nom et prénom dans les en-têtes!
Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la justification des résultats demandés. Une réponse correcte sans justification pourra ne rapporter aucun point.

Exercice 1 (~ *6 points*). Soit Ω un ensemble. On rappelle que si A et B désignent des sous-ensembles de Ω, $A\Delta B$ désigne le sous-ensemble de Ω défini par

$$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

On définit d'autre part le connecteur logique binaire $\veebar$ par la relation suivante

$$p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \text{ , pour toutes variables logiques } p \text{ et } q.$$

1. Montrer, en détaillant et justifiant chaque étape, que $A\Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$.
2. En utilisant une interprétation ensembliste (qu'il faudra préciser), déduire de la question précédente que
$$p \veebar q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q).$$
3. Parmi les deux expressions proposées pour $p \veebar q$, laquelle constitue une disjonction de conjonctions? Justifier.
4. Calculer les expressions suivantes, en pensant à justifier!
$$p \veebar p \ ; \ p \veebar \neg p \ ; \ p \veebar \mathbf{0} \ ; \ p \veebar \mathbf{1}$$

Exercice 2 ($\sim$ *10 points*). Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
Rappel: le connecteur "flèche" est défini par

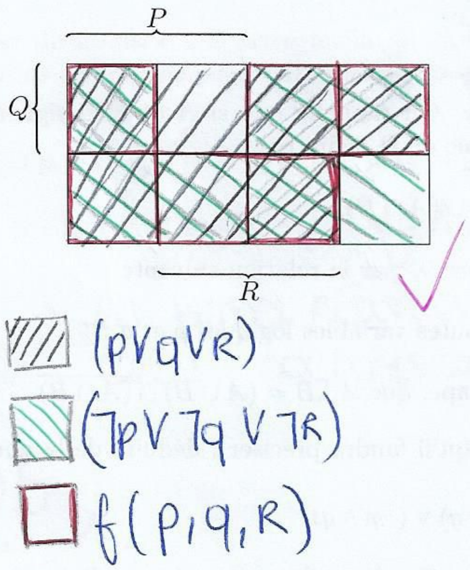
$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

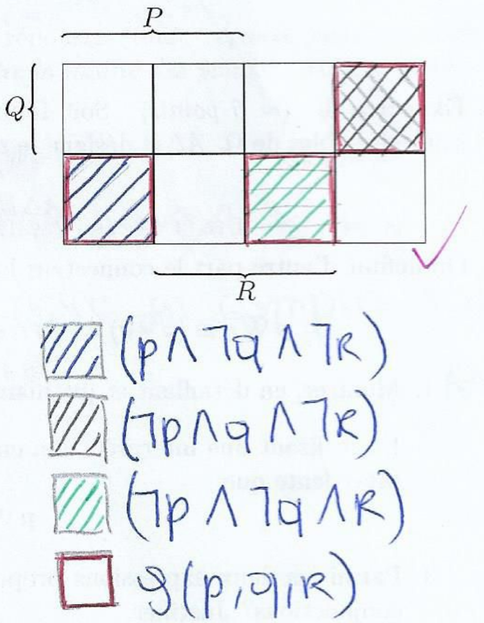
On considère les deux fonctions logiques f et g suivantes:

$$\begin{aligned} f(p,q,r) &\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \\ g(p,q,r) &\equiv (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \end{aligned}$$

Partie I.

1. Représenter les expressions de $f(p,q,r)$ et $g(p,q,r)$ dans les deux diagrammes de Karnaugh dessinés ci-dessous. *Ne pas oublier les légendes!*





2

2. En comparant ces deux diagrammes, justifier que $g(p,q,r) \models f(p,q,r)$.

3. En appliquant les règles du calcul logique, simplifier l'expression suivante (*Indication: pour ne pas compliquer les calculs, on pourra conserver les "max-termes", c'est-à-dire les termes de la forme* (*truc* $\vee$ *machin* $\vee$ *chose*), *sans chercher à les développer ou à distribuer les opérateurs*).

$$[(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)] \to [(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)].$$

4. Le résultat que vous obtenez est-il cohérent avec la question 2 ci-dessus? Pourquoi?

Partie II.

1. Tracer dans un même tableau les tables de vérité de f et g.

2. Appliquer l'algorithme de Quine pour condenser la table de vérité de f. *Vous présenterez l'algorithme de Quine en complétant le tableau de la page suivante et vous n'oublierez pas de donner la table de vérité condensée sur votre copie.*

3

pas	loc		p	q	r	cas
0		$f(p,q,r) \equiv (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$				1
1	1	…………	$f(0,q,R) \equiv q \vee R$	…………	…………	1
2	2	…………	…………	$f(0,0,R) \equiv R$	…………	1
3	3	…………	…………	…………	$f(0,0,0) \equiv 0$	2
4	3	…………	…………	…………	$f(0,0,1) \equiv 1$	2
5	2	…………	…………	$f(0,1,R) \equiv 1$	…………	2
6	1	…………	$f(1,q,R) \equiv \neg q \vee \neg R$	…………	…………	1
7	7	…………	…………	$f(1,0,R) \equiv 1$	…………	2
8	$\cancel{7}$	…………	…………	$f(1,1,R) \equiv \neg r$	…………	1
9	9	…………	…………	…………	$f(1,1,0) \equiv 1$	2
10	9	…………	…………	…………	$f(1,1,1) \equiv 0$	2/ FIN
…	…	…………	…………	…………	…………	…
…	…	…………	…………	…………	…………	…
…	…	…………	…………	…………	…………	…

TB!

Tournez la page pour trouver l'exercice 3...

NOM ....RIFKI.... PRENOM ....Kenza.... GROUPE 110

Exercice 3 (∼ *4 points*). Soient a, b, c des nombres réels et u, v, w des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On désigne par $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les variables propositionnelles suivantes

$$\begin{aligned} p &= \{a = b = c = 0\} \\ q &= \{au + bv + cw = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\} \\ r &= \{\text{la famille } (u, v, w) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3\} \\ s &= \{\text{la famille } (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$

Rappel: on dit qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *est* **libre** *s'il n'existe aucune combinaison linéaire de ces vecteurs qui vale* $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ *à l'exception de la combinaison linéaire correspondant à tous les coefficients nuls.*

Cocher directement sur cette feuille la ou les bonnes réponses (*toute réponse juste rapporte les points correspondants, toute réponse fausse fait perdre la moitié des points*). Aucune justification n'est demandée.

☐ $p \equiv \mathbf{1}$ ☒ $(p \to q) \equiv \mathbf{1}$ ☒ $(q \to p) \equiv \mathbf{1}$ ☒ $p \models q$ ☒ $q \models p$

☐ $r \models s$ ☒ $s \models r$ ☒ $(q \to p) \models r$ ☒ $[(q \wedge \neg p) \to \neg r] \equiv \mathbf{1}$ ☐ $r \models \neg q$

* les bonnes réponses à prendre en compte sont celles cochées en noir*.

0,5

UNIVERSITÉ
PARIS DESCARTES
IUT
DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

NOM : RIFKI
Prénom : Kenza
(en capitales)
Écrire très lisiblement

DISCIPLINE : Logique Formelle
Date de l'épreuve : 17/01/2017
Année : 1re Groupe : 110

NOTE DE 0 À 20	APPRÉCIATIONS
16,5/20	Félicitations pour ce travail soigné, continuez ainsi !

Ne rien écrire dans cette marge

EXERCICE 1 :

1. $(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$

$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$ d'après la loi de De Morgan

$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B})$ car n est distributif par rapport à U

$\equiv 0 \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup 0$

$\equiv (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

$\equiv A \Delta B$

Donc $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$

2

2. $p W q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

L'interprétation ensembliste de cette expression est la suivante:

$$(P \cup Q) \cap (\overline{P \cap Q})$$

avec P et Q les ensembles représentant p et q.

or, ~~en~~ d'après la question 1,

$$(P \cup Q) \cap (\overline{P \cap Q}) \equiv P \Delta Q$$

$P \Delta Q$ est également définit comme

$$P \Delta Q \equiv (P \cap \overline{Q}) \cup (\overline{P} \cap Q)$$

On en déduit donc que $(P \cup Q) \cap (\overline{P \cap Q}) \equiv (P \cap \overline{Q}) \cup (\overline{P} \cap Q)$

1,5

Ainsi, $p W q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

0,5

3. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ est une disjonction de conjontions.

En effet, cette expression est une disjonction $(\vee)$ de 2 conjonctions $(p \wedge \neg q)$ et $(\neg p \wedge q)$

4. $p W p \equiv (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge p) \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$

2

$p W \neg p \equiv (p \wedge \neg(\neg p)) \vee (\neg p \wedge \neg p) \equiv p \vee \neg p \equiv 1$

$p W 0 \equiv (p \wedge \neg 0) \vee (\neg p \wedge 0) \equiv p \vee 0 \equiv p$

$p W 1 \equiv (p \wedge \neg 1) \vee (\neg p \wedge 1) \equiv 0 \vee \neg p \equiv \neg p$

Exercice 2 :

0,5

2. Soit A l'ensemble représentant $f(1,q,r)$
et B l'ensemble représentant $g(1,q,r)$.
On remarque, d'après les diagrammes, que B est inclus dans A
$B \subset A$

Ainsi, on en déduit que $g(1,q,r) \vDash f(1,q,r)$. B1

1

3. $[(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)] \rightarrow [(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)]$

$\equiv \neg[(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)] \vee [(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)]$

$\equiv [\neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge r)] \vee [(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)]$

$\equiv [(\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)] \vee [(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)]$

$\equiv 1$ car on remarque que quelques soient les valeurs de p, q et r, comme il s'agit d'une disjonction de conjonctions de disjonctions, le résultat sera toujours 1 $(1 \vee 1 \equiv 1)$.

Justification inappropriée.

1

4. Oui ce résultat est cohérent et confirme la question 2, car

$g(p,q,r) \vDash f(p,q,r) \Leftrightarrow g(p,q,r) \rightarrow f(p,q,r) \equiv 1$.

OK !

Partie II :

1.

p	q	r	f(p,q,r)	g(p,q,r)
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0

2

2. D'après l'algorithme de Quine :

p	q	r	f(p,q,r)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	•	1
1	0	•	1
1	1	0	1
1	1	1	0

0,5