TD 1 MDI

Exercice 1

1) $E = \{0; 7; 14; 28; 35; 42; 49\}$

2) $F = \{8; 9\}$

3) $G = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 3$
$41; 43; 47\}$

Exercice 2

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{3, 5, 7\}$, $C = \{1, 4, 5, 6\}$

$B \cap C = \{5\}$

$\overline{C} = \{2, 3, 7, 8, 9, 10\}$

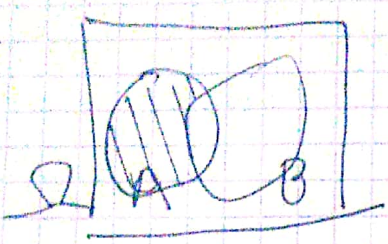
$(A \cup B) \cap C = \{1, 4, 5\}$

$A \cup (B \cap C) = \emptyset$

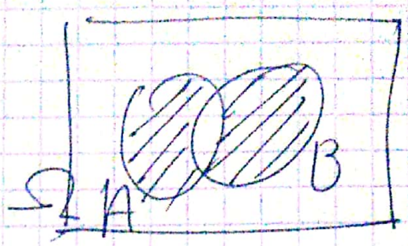
$\overline{(A \cup B)} = \{6, 8, 9, 10\}$

MDI - TD 2

1)



$A \setminus B$



$A \Delta B$

$(A \setminus B) = A \cap \overline{B}$ $\qquad$ $(A \Delta B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

2) $\Omega = [\![1;10]\!]$, $A = [\![1;4]\!]$, $B = [\![3,5,7]\!]$
$C = [\![1,4,5,6]\!]$

$A / B = [\![1,2,4]\!]$

$A \Delta B = \cancel{[\![5,6]\!]}\ \cancel{[\![1,4,3,B,5,7]\!]}\ \{1,2,4\} \cup \{5,7\}$

$A \setminus C = \cancel{\emptyset}\ \{2,3\}$

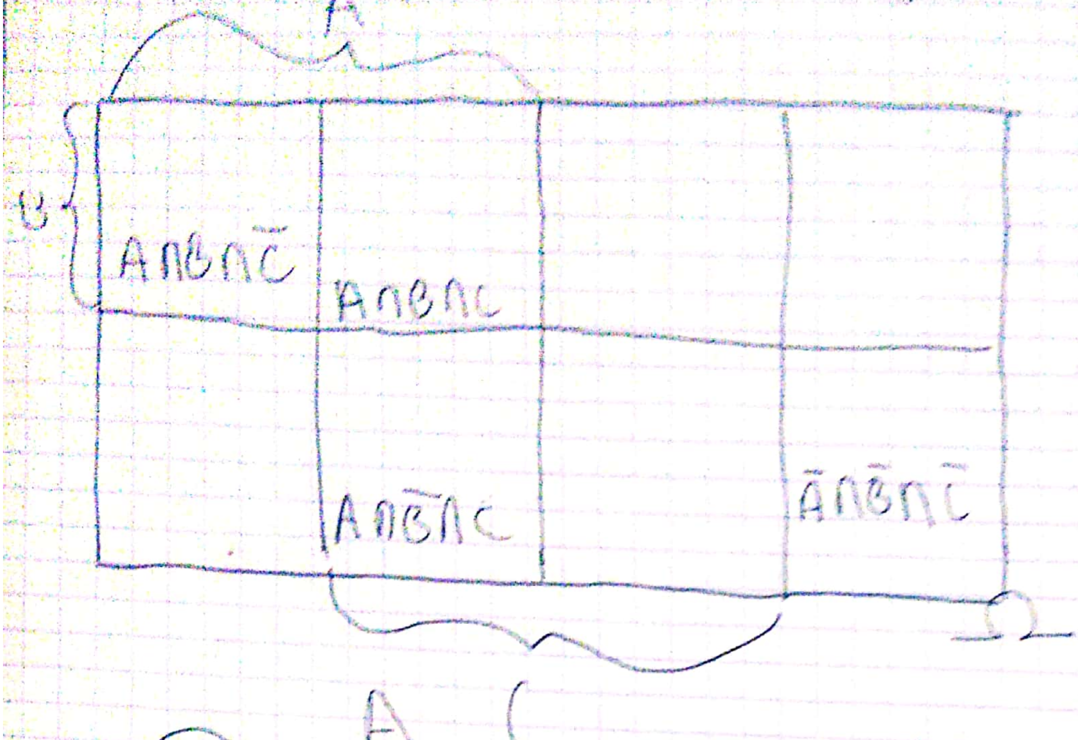
$A \Delta C = \{2,3,5,6\}$

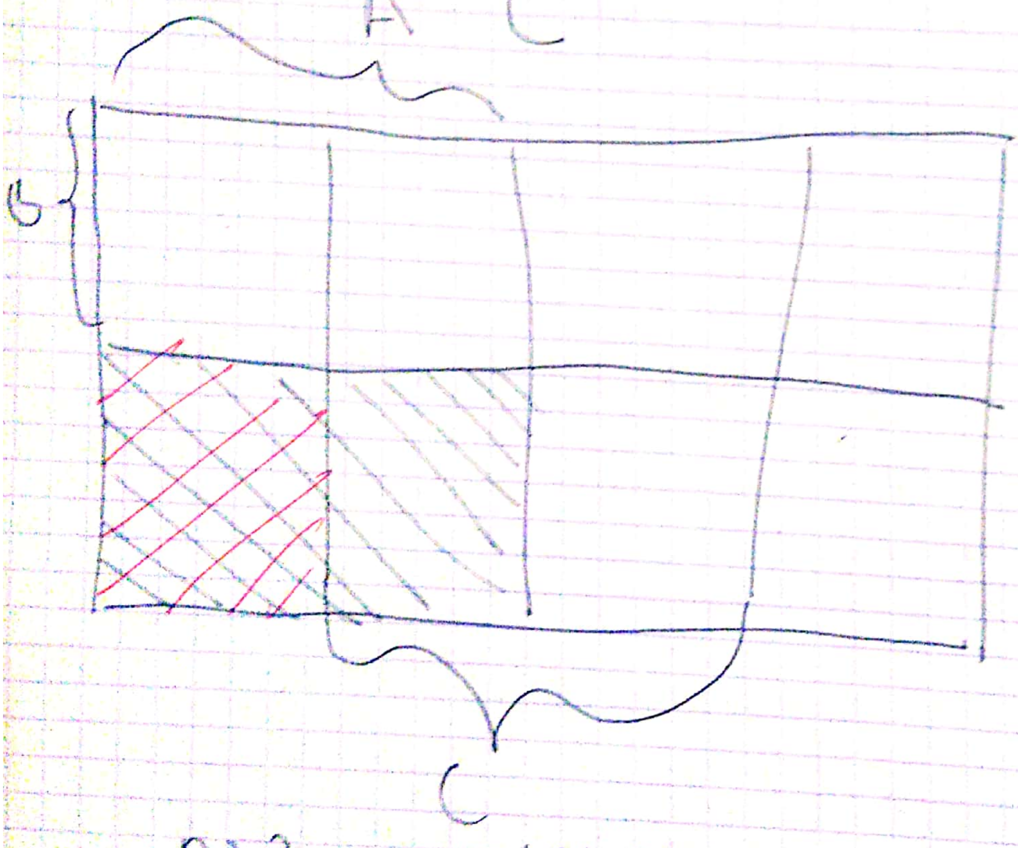
3) $\setminus$ n'est pas commutative $\Omega = \{1\}$ $A = \emptyset$ $B = \Omega$
Δ est commutative $\qquad A \setminus B = \emptyset$
$B \setminus A = \Omega$

$\setminus$ n'est pas associative
$\Omega = \{0\}$, $A = B = C = \Omega$
$(A \setminus B) \setminus C = \emptyset \setminus \Omega = \emptyset$

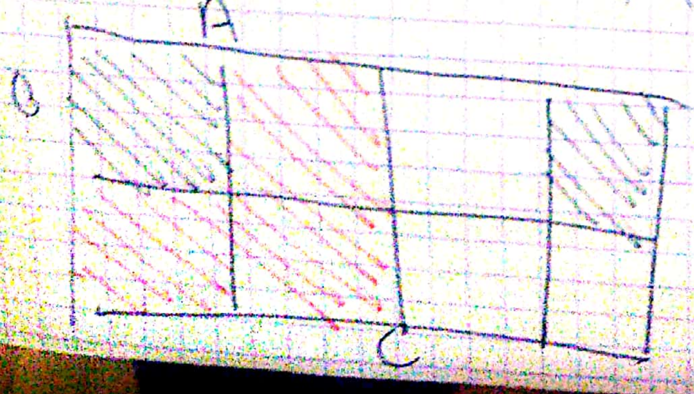
$A \setminus (B \setminus C) = \Omega \setminus \emptyset = \Omega$

Diagramme de Karnaugh





A\B (A\B)\C

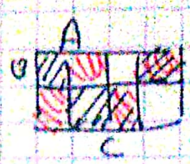


A\(B\C)

$A \Delta B$

$B \Delta A$

$(A \Delta B) \Delta C$



$A \Delta (B \Delta C)$

Δ ~~est~~ ~~pas~~ associative

Exercice 9

$\mathcal{R}$:

$x + y$ est un entier pair

Reflexivité : oui car si $x \in \mathbb{Z}$, $2x$ est pair.

symétrie : oui car pour x, y on a : $x + y = y + x$

transitivité : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3, (x \mathcal{R} y$ et $(y \mathcal{R} z)) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Soit $x, y, z \in \mathbb{Z}^3$ tq : $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$

On a : $x + z = (x+y) - (y-z)$

$= \underbrace{(x+y)}_{\text{pair}} - (\underbrace{(x+y)}_{\text{pair}} \underbrace{-2z}_{\text{pair}})$

MDI TD3

Ex 13

$(\neg p \wedge q)$: Pierre n'aime pas marie et marie aime pierre

$\neg(p \vee q)$: Il est faux que pierre aime marie ou que marie aime pierre

$\neg(p \wedge q)$: il est faux que pierre aime marie et marie aime pierre

Ex 14 :

$e \equiv \neg(\neg p \wedge (\neg q \vee p))$

$\equiv \neg(\neg p) \vee \neg(\neg q \vee p)$

$\equiv p \vee (\neg(\neg q) \wedge \neg p))$

$\equiv p \vee (q \wedge \neg p)$

$\equiv p \vee (q \wedge \neg p) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p)$

$\equiv p \vee q$

$e' \equiv \neg(\neg p \vee (\neg q \wedge p))$

$\equiv p \wedge \neg(\neg q \wedge p)$

$\equiv p \wedge (q \vee \neg p)$

$\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg p)$

$\equiv (p \wedge q) \vee 0$

$\equiv p \wedge q$

$e'' \equiv \neg(\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg 1))$

$e \equiv \neg(\neg p \wedge \neg r) \wedge (q \wedge \neg 1)$

$\equiv (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

~~$\equiv p \vee q \wedge p \vee r \wedge \neg q \wedge r \vee r$~~

~~$\equiv p \vee \neg q \wedge p \vee r \wedge r \vee \neg q \wedge r$~~

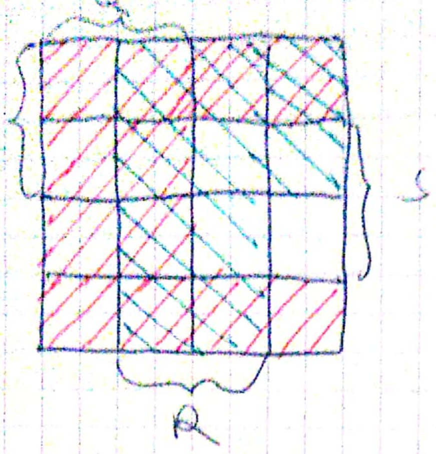
$\equiv (p \wedge \neg q) \vee r$

↳ forme disjonctive canonique de e''

Ex15

1) $e \equiv [(p \wedge \neg q) \vee r] \wedge [\neg s \vee q]$

(i)



$E = [(P \cap \overline{Q}) \cup R] \cap [\overline{S} \cup Q]$

(ii) $e = [(p \times \overline{q}) + r] \times [\overline{s} + q]$

$= [p\overline{q} + r][\overline{s} + q]$

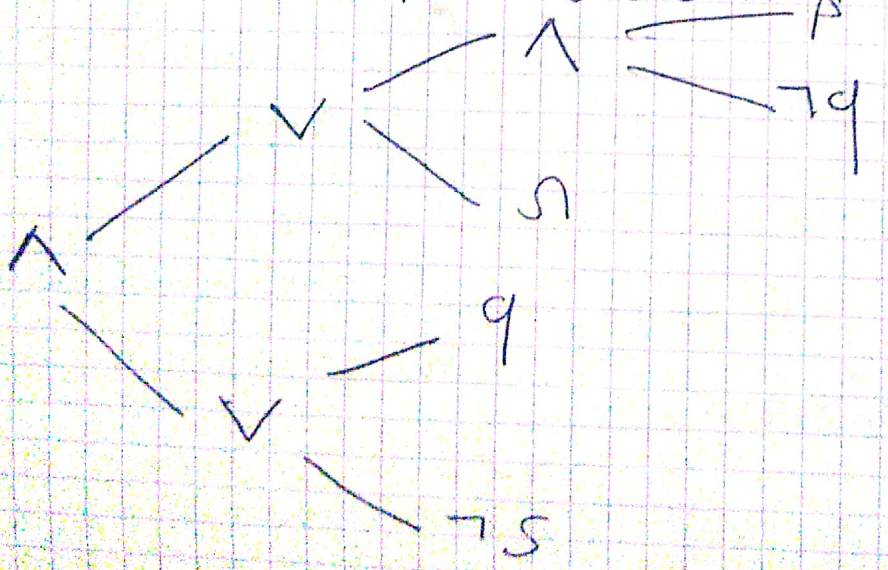
$= p\overline{q}\overline{s} + \cancel{p\overline{q}q} + r\overline{s} + rq$

$= p\overline{q}s + r\overline{s} + rq$

$= p\overline{q}s + r(\overline{s} + q)$

(iii) $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [\neg s \vee q]$

0 1 2 2 2 2 1 1 1 0 0 0 1 1 ~~1~~ 1 0



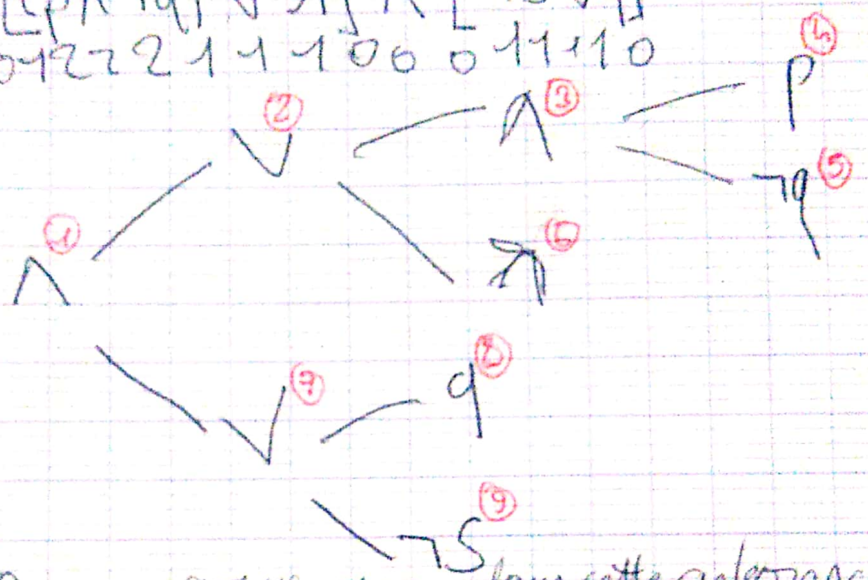
MDI - TD4

Ex 15

(iii)

$e = [(p \land \neg q) \lor r] \land [\neg s \lor q]$

0 1 2 2 2 2 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0



(iv) On remarque que dans cette arborescence, toutes les connexion et 'Λ' 'V' sont de nature binaire donc un PPDA au long des sommets de cette arborescence permet de numéroter les sommets et donc de passer e dans une notation préfixe en écrivant les symboles rencontrés au fil du parcours dans leur ordre d'apparition.

Notation préfixe de e

$e = \land \lor \land p \neg q \, r \lor \neg s \, q$

i)

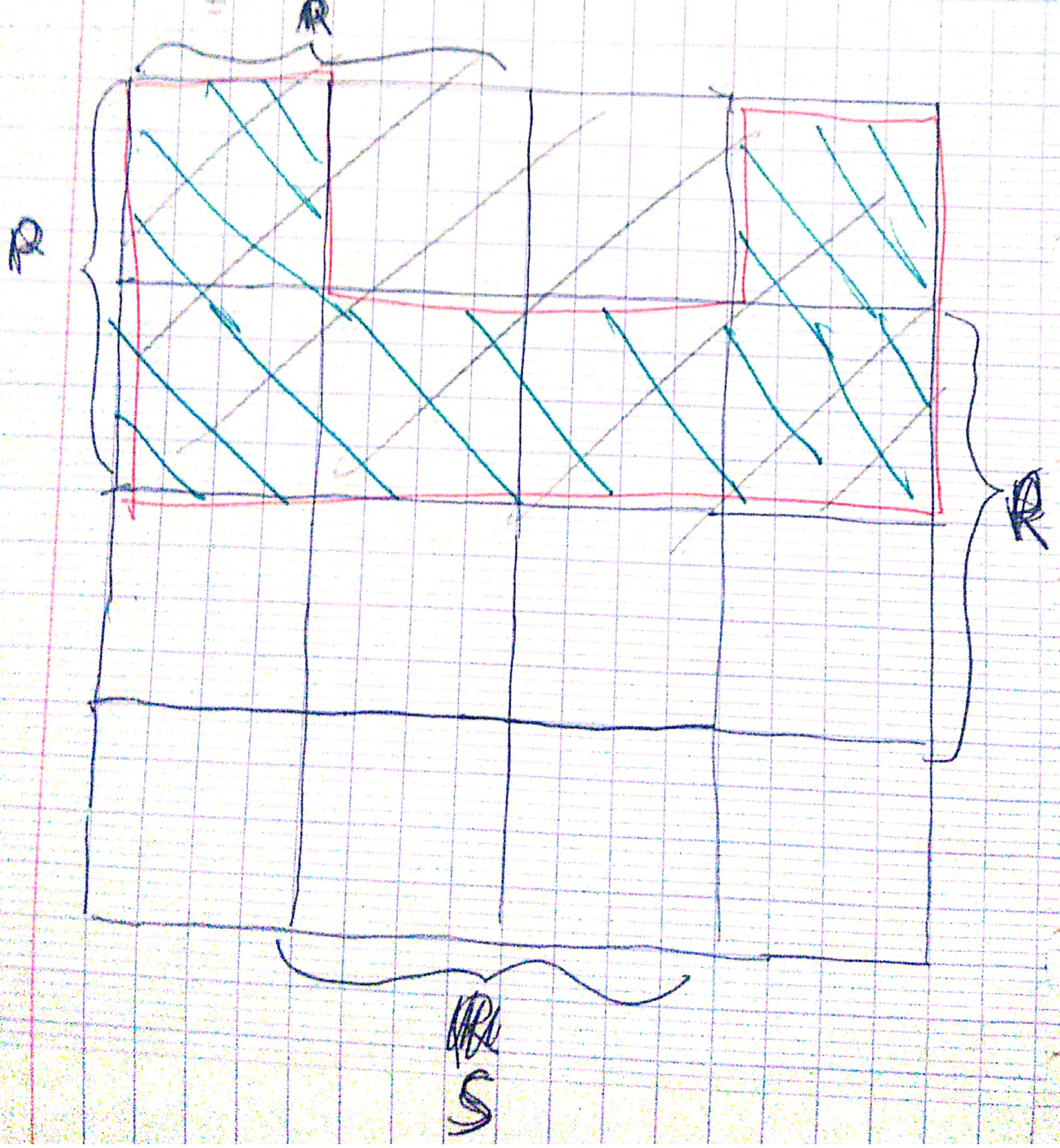
ii) $e' = \neg\{[p \wedge \neg(q \wedge s)] \vee r \vee \neg s\} \wedge (\neg s \vee q) \wedge p$

$= \neg\{[p \wedge (\neg q \vee \neg s)] \vee r \vee \neg s\} \wedge (\neg s \vee q) \wedge p$

$= \neg\{[\neg p \vee \neg(\neg q \vee \neg s)] \vee r \vee \neg s\} \wedge (\neg s \vee q) \wedge p$

$= \{[\neg p \vee (q \wedge s)] \vee r \vee \neg s\} \wedge (\neg s \vee q) \wedge p$

$=$

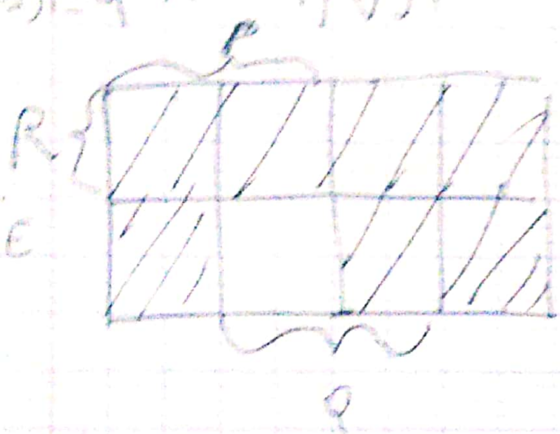


Exercice N° 5

1) $1 \to 0 \equiv 0$ $\Rightarrow$ Non commutatif

$0 \to 1 \equiv 1$

$(p \to q) \to r \equiv (p \land \neg q) \lor r$ $\Rightarrow$ Non associatif



TAUTOLOGIE

$p \to (q \to r) \equiv \neg p \lor \neg q \lor r$

$\equiv 1$

$p \to (q \land r)$

$\equiv \neg p \lor (q \land r)$

$(p \to q) \land (p \to r) \equiv (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor r)$

$\equiv \neg p \lor (q \land r)$

$\to$ est distributif à gauche par rapport à $\land$

2) $P \nrightarrow Q \equiv P \cap \overline{Q} = P \setminus Q$

$\setminus$ n'est pas commutative ni associative
donc $\nrightarrow$ n'est pas commutative ni associative.

pr

$p \nrightarrow (q \wedge r) = p \wedge \neg (q \wedge r)$

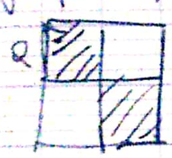
$= p \wedge (\neg q \vee \neg r)$

$(p \nrightarrow q) \wedge (p \nrightarrow r) = (p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg r)$

$= p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$

3)

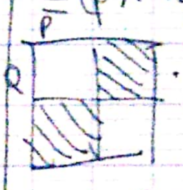
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$



commutatif
et associatif

4) $p \nleftrightarrow q \equiv (p \nrightarrow q) \wedge (q \nrightarrow p)$

$\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$



↳ $P \Delta Q$

commutatif et
associatif.

MDI TD 6

Exercice 20

$f1(p,q) \equiv (q \vee p) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$

p	q	$q \vee p$	$(q \rightarrow \neg p)$	$f1(p,q)$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	0	0

$f2(p,q,r) \equiv (q \vee p) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$

p	q	r	$(q \vee p)$	$(q \rightarrow \neg r)$	$f2$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

$f3(p,q,r) \equiv (q \leftrightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$

p	q	r	$q \leftrightarrow \neg p$	$p \leftrightarrow r$	$f3$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0

Exercice 21

PAS	Loc	p q r s	CAS
0	–	$f(p,q,r,s) \equiv [(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee s] \wedge [((\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee q)) \vee \neg s]$	1
1	0	$f(0,q,r,s) \equiv [\neg q \vee s] \wedge [q \vee \neg s]$	1
2	1	$f(0,0,r,s) \equiv \neg s$	1
3	2	$f(0,0,r,0) = 1$	2
4	2	$f(0,0,r,1) = 0$	2
5	1	$f(0,1,r,s) \equiv s$	1
6	5	$f(0,1,r,0) = 0$	2
7	5	$f(0,1,r,1) = 1$	2
8	0	$f(1,q,r,s) = [r \vee s] \wedge [\neg r \wedge \neg s]$	1
9	8	$f(1,q,0,s) = s$	1
10	8	$f(1,q,0,0) = 0$	2
11	8	$f(1,q,0,1) = 0$	2
12	8	$f(1,q,1,s) \equiv \neg s$	1
13	12	$f(1,q,1,0) = 1$	2
14			