# Séries Entières et Fonctions Analytiques

## I- Généralités sur les séries entières.

On appelle *série entière* toute série dépendant de la variable complexe $z$ et prenant la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

pour une certaine suite $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et un $z_0 \in \mathbb{C}$ fixés.

Dès lors que cette première définition est posée, on pourra commencer par se demander quelle est la forme du domaine $\mathcal{D}_C$ des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels cette série converge.

Bien entendu : $z_0 \in \mathcal{D}_C$.

Nous allons voir que parfois : $\mathcal{D}_C = \{z_0\}$, tandis que dans d'autres situations : $\mathcal{D}_C = \mathbb{C}$, tout dépendant du point auquel les variations de $|a_n|$ sont "modérées" pour $n \to +\infty$.

**Théorème** : Quelle que soit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ utilisée, il existe $R \in [0; +\infty]$ dépendant de $(a_n)_{n\geq 0}$ et tel que

1. Si $|z - z_0| < R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ est absolument convergente, *tandis que*
2. Si $|z - z_0| > R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ diverge grossièrement.

$R \in [0; +\infty]$ est appelé *rayon de convergence* de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ et s'exprime à partir des *coefficients* de cette série à travers l'identité

$$R = \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$

Notons enfin que dans le cas où $|z - z_0| = R$, diverses possibilités sont envisageables (*convergence*, *convergence absolue* ou *divergence* de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$).

**Quelques exemples de calculs de rayons de convergence** :

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}(n!)z^n$ est nul !
   En effet, d'après la *formule de Stirling* :
$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!} = \limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = +\infty$$

2. Pour la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n$, on obtient le rayon de convergence $R = 1$.
   En effet :
$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1} = 1$$

3. Pour la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}(z-i)^n$, on obtient encore $R = 1$ puisque
$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

**Valeurs de certaines séries entières célèbres :**

1. Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z) = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

2. Pour tout nombre complexe $z$ tel que $|z| < 1$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \frac{1}{1-z}$$

tandis que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \frac{1}{1+z}$$

3. Pour tout nombre complexe $z$ tel que $|z| < 1$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n = -\log(1-z) = -\left\{\ln|1-z| + i\,\mathrm{Arg}(1-z)\right\}$$

tandis que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n + \ldots = \log(1+z)$$

A ce stade, on parvient à remarquer que la valeur de la dernière série ci-dessus pouvait se deviner en *"intégrant terme à terme"* l'identité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \frac{1}{1+z}$$

Dans l'autre sens, on peut être tenté de *"dériver terme à terme"* e.g. l'identité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n = -\log(1-z)$ ... *Mais est-ce bien licite ??*

## II- Fonctions Analytiques et Dérivabilité Complexe.

### Notations et définitions :

- Etant donnés $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, on pose

$$D_{z_0,R} = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z - z_0| < R\}$$

- On dira que le sous-ensemble (non-vide) $\Omega$ de $\mathbb{C}$ constitue un <u>*domaine ouvert*</u> dans $\mathbb{C}$ si :

$$\forall z_0 \in \mathbb{C}, \exists R > 0, \quad D_{z_0,R} \subset \Omega$$

- **Ex. :**
  - $\mathbb{C}$ constitue bien évidemment un tel domaine ouvert, ainsi que $\mathbb{C} \setminus \{Z_0\}$ pour tout nombre complexe fixé $Z_0$.
  - $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ constitue un domaine ouvert du plan complexe, tandis que $\tilde{\Omega} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^*$ n'en est pas un !

**Notations et définitions (suite) :**

Soit $D = D_{z_0,R}$ un disque ouvert dans le plan complexe et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définies sur $D$.

- On dira que $f$ est *Développable en Série Entière (DSE)* dans $D$ s'il existe une suite complexe $(a_n)_{n\geq 0}$ permettant d'écrire

$$\forall z \in D, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- On dira que $f$ est *dérivable en* $z_0$ s'il existe une constante complexe $C$ pour laquelle

$$\frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)}{\zeta} \underset{\zeta \to 0}{\longrightarrow} C$$

Comme pour les fonctions d'une variable réelle, on pourra alors poser $C = f'(z_0)$ ... mais il s'agit là d'une forme *très forte* de dérivabilité, comme nous allons bientôt le constater !

**Définition et Théorème Fondamental :**

Soit $\Omega$ un domaine ouvert du plan complexe et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définies sur $\Omega$.

- On dira que $f$ est *analytique dans* $\Omega$ si

$$\forall z_0 \in \Omega, \exists R > 0, \quad D_{z_0,R} \subset \Omega \text{ et } f \text{ est DSE dans } D_{z_0,R}$$

- **(Un) Théorème fondamental de l'analyse complexe :**
La fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est *analytique dans* $\Omega$ si et ssi $f$ est *dérivable* en tout point $z_0$ de $\Omega$ !
Dans ce cas, on pourra présenter $f$ *localement* à travers sa *série de Taylor*, au sens où l'on aura

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

dès lors que $z$ est "suffisamment proche" de $z_0$.

**Deux Propriétés Fondamentales :**

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction DSE sur le disque ouvert $D$, telle que

$$\forall z \in D, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- $f'$ est telle que

$$\forall z \in D, \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

  tandis que $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$\forall z \in D, \quad F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} (z - z_0)^n$$

  fournit la primitive de $f$ s'annulant en $z_0$ !

- Dans le cas où $z_0 = 0$, les fonctions $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $h : D \longrightarrow \mathbb{C}$ définies respectivement par

$$\forall z \in D, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}(z-z_0)^{2n} \text{ et } h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}(z-z_0)^{2n+1}$$

fournissent les parties paire et impaire de la fonction $f$ !

**Exemples :**

1. La fonction $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ peut être présentée à partir de sa série de Taylor autour de $z_0 = 0$ :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

mais aussi en se basant sur sa série de Taylor autour de n'importe quel autre point $z_0$ :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z-z_0)^n = e^{z_0}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z-z_0)^n$$

On retrouve par là-même la *multiplicativité de la fonction exponentielle*, à savoir le fait que

$$\forall (z, z_0) \in \mathbb{C}^2, \quad e^z = e^{z_0} \cdot e^{z - z_0}$$

Ses parties paire et impaire sont les fonctions $\cosh, \sinh : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ données respectivement par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \ldots$$

et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \ldots$$

$\cosh : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est paire, $\sinh : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est impaire et l'on a $\cosh + \sinh = \exp$, avec en outre

$$\forall z \in \mathbb{C}, \cosh'(z) = \sinh(z), \sinh'(z) = \cosh(z) \text{ et } \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

2. On parvient aussi à retrouver les fonctions $\cos$ et $\sin$ de la trigonométrie

Scanned by CamScanner

circulaire en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots$$

et

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots$$

La *1ère propriété fondamentale* permet alors de récupérer les identités $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$, et l'on a aussi

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

3. On a pour tout $z$ tel que $|z| < 1$ :

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n + \dots$$

## III- Equations de Cauchy-Riemann et Fonctions Harmoniques.

Dans ce paragraphe, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction analytique dans le domaine ouvert $\Omega$ et l'on pose

$$\forall z \in \Omega,\ f(z) = f(x+iy) = f_1(x,y) + if_2(x,y),$$

$f_1, f_2$ étant quant à elles des fonctions à valeurs réelles.

**Equations de Cauchy-Riemann :**
Dès lors que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable (au sens complexe), les fonctions $f_1, f_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ doivent admettre des dérivées partielles du 1er ordre dans $\Omega$ et l'on doit avoir : $\forall (x_0, y_0) \in \Omega$,

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & = & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) & = & -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) \end{array} \right.$$

Ces deux équations fondamentales peuvent être obtenues en posant $\zeta = h$ puis $\zeta = i \cdot h$ dans l'identité

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)}{\zeta} = f'(z_0),$$

$h$ étant un nombre *réel* (qui a vocation à tendre vers 0).

**Conséquence importante : harmonicité de $f_1$ et $f_2$ :**
les parties réelle et imaginaire $f_1, f_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de la fonction analytique $f$ sont en fait de classe $\mathcal{C}^2$ et *harmoniques* dans le domaine ouvert $\Omega$, au sens où : $\forall (x_0, y_0) \in \Omega$,

$$\Delta f_1(x_0, y_0) = \left\{ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right\} (x_0, y_0) = 0 = \Delta f_2(x_0, y_0)$$

**N.B. :** on vient de voir apparaître un opérateur qui occupe une place centrale en physique et en sciences de l'ingénieur (ainsi que dans bien des branches de la Mathématique !), l'*Opérateur de Laplace*

$$\Delta : \varphi \mapsto \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\} ,$$

opérateur que l'on peut considérer par exemple comme un endomorphisme de l'espace vectoriel des fonctions $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega$.

**Exemples :**

1. Les parties réelle et imaginaire de la fonction exponentielle sont manifestement les fonctions $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ données respectivement par

$$f_1(x,y) = e^x \cos y \text{ et } f_2(x,y) = e^x \sin y$$

Au 1er ordre, on a manifestement

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$$

et

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

*(Equations de Cauchy-Riemann).*

A l'ordre 2, on constate que

$$\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$$

2. Dans le cas de la fonction $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, remarquons que si $x = \mathcal{R}e(z) > 0$:

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + i \arctan(\frac{y}{x})$$

On a donc, toujours dans le domaine où $x = \mathcal{R}e(z) > 0$ :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\ln(\sqrt{x^2+y^2})\right\} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\arctan(\frac{y}{x})\right\} = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$$

tandis que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\ln(\sqrt{x^2+y^2})\right\} = \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\arctan(\frac{y}{x})\right\} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$