

Nombres Complexes

I- Introduction

Les nombres complexes forment un ensemble de nombres qui peuvent être représentés dans le plan, et que l'on peut additionner ou multiplier entre eux.



NICCOLÒ TARTAGLIA,
VENIZIANO.

Historiquement: le surgissement des Nombres Complexes a lieu au cours de la Renaissance italienne (XVI^{ème} siècle) à partir des travaux de Tartaglia, Cardano et Bombelli portant sur la résolution d'équations algébriques de degré trois ou quatre.

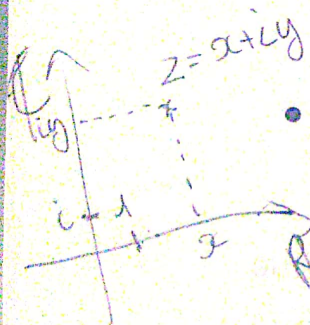
II- Définitions fondamentales.

- Ingrédient de base: un *nouveau nombre* i vérifiant $i \times i = i^2 = -1$.
- Un nombre complexe z quelconque est somme d'un nombre réel x et d'un nombre imaginaire pur iy (où y est réel): $z = x + iy$. On appelle alors x la partie réelle du nombre complexe z , et y sa partie imaginaire, notation: $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$.

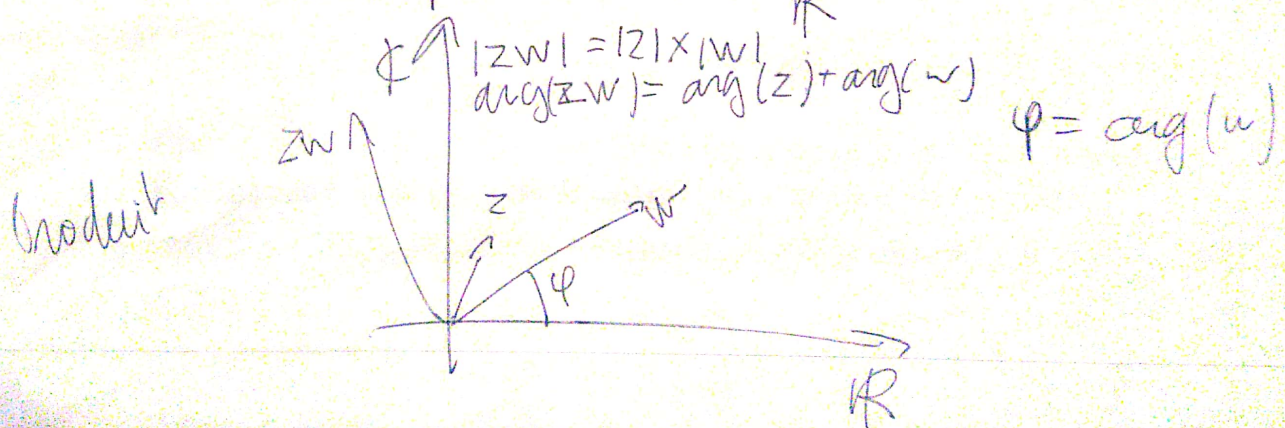
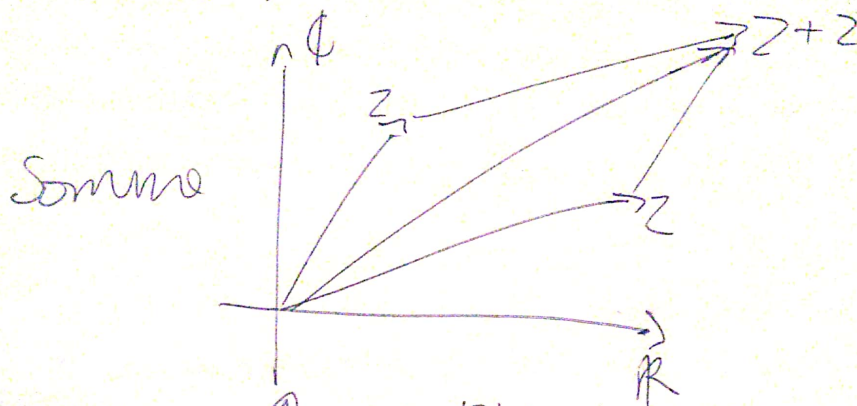
- Etant donnés deux nombres complexes $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, on définit leur addition et leur multiplication à travers les formules

$$z + z' = (x + x') + i(y + y'), \quad z \times z' = zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$$

- On note \mathbb{C} l'ensemble de tous les nombres complexes. Les nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire ($x = x'$, $y = y'$).



- Sommer les nombres complexes z et w revient tout simplement à effectuer une addition dans le plan vectoriel (règle de complétion du parallélogramme):



III- Remarques supplémentaires, exemples.

- L'addition et la multiplication complexes sont des extensions de l'addition et de la multiplication de nombres réels; toutes les règles usuelles du calcul dans \mathbb{R} (associativité et commutativité de $+$, \times , distributivité de \times par rapport à $+$) sont encore valables dans \mathbb{C} .
- La formule du binôme de Newton est donc elle aussi valable dans \mathbb{C} :

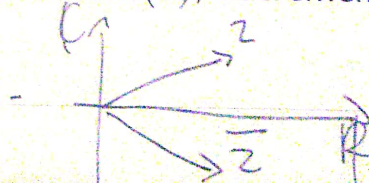
$$\forall (w, z) \in \mathbb{C}^2, \quad (w + z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w^k z^{n-k}$$

- Un premier exemple de calcul:

$$(3+0.5i)(2-4i) + (i-1)^3 = 6+i-12i-2i^2+i^3-3i^2+3i-1 = 10-9i$$

- Pour $z = x + iy$ quelconque, on appelle nombre complexe conjugué de z et on note \bar{z} le nombre donné par

$$Re(\bar{z}) = Re(z), Im(\bar{z}) = -Im(z), \text{ autrement dit: } \bar{z} = x - iy.$$



Observons tout de suite que

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2iy = 2i\operatorname{Im}(z), \quad z\bar{z} = x^2 + y^2$$

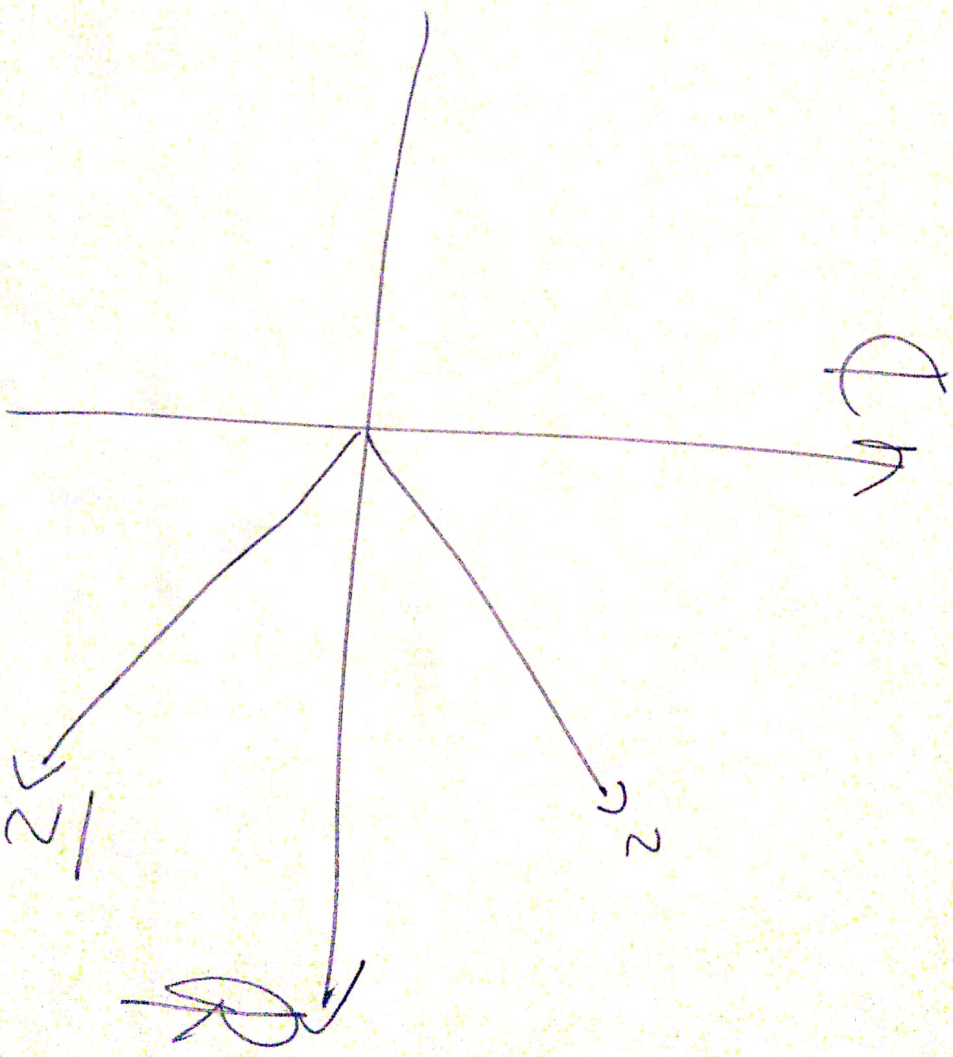
La dernière égalité s'emploie très souvent pour identifier les parties réelles et imaginaires d'un quotient dans \mathbb{C} , puisque pour $z = x + iy$ et $w = u + iv \neq 0$ on a

$$\frac{z}{w} = \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\frac{yu - xv}{u^2 + v^2}$$

- Le nombre $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$ est noté $|z|$ et appelé le module du nombre complexe z . On a donc:

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad \frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(xu + yv) + i(yu - xv)}{u^2 + v^2}$$

- Passer du nombre complexe z à son conjugué \bar{z} revient à effectuer une symétrie par rapport à l'axe des nombres réels:



$$z = \frac{r}{(z-i)r}$$

$$\frac{(z-i)r}{(z-i)r}$$

$$\frac{z-i}{z-i}$$

- Exemples:

$$\frac{1}{4 - 5i} = \frac{4 + 5i}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{4}{41} + i\frac{5}{41},$$

$$\frac{8 - i}{7 + i} = \frac{(8 - i)(7 - i)}{49 + 1} = \frac{55}{50} + i\frac{-15}{50} = \frac{11}{10} - \frac{3}{10}i$$

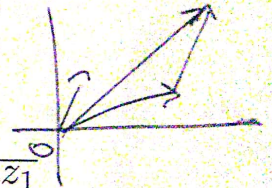
- Quelques Règles particulièrement utiles:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

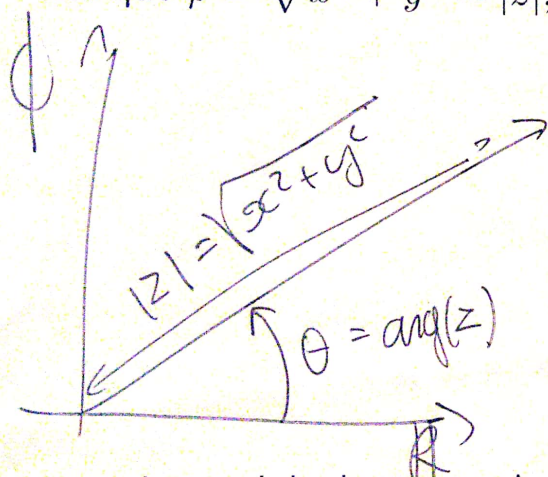
$$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$$

$$|z| = 1 \implies \bar{z} = \frac{1}{z}$$



IV- Coordonnées polaires. Formule de De Moivre.

- Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Soient $\rho > 0, \theta \in \mathbb{R}$ tels que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$



$$\text{Arg} : (\phi / \rho) \rightarrow]-\pi : \pi]$$

- ρ est le *module* de z ; sous la contrainte $-\pi < \theta \leq \pi$, le nombre θ est lui aussi unique et appelé *argument* du nombre complexe (non nul) z . Deux nombres complexes non nuls z et z' sont égaux si et ssi $|z'| = |z|$ et $\text{Arg}(z') = \text{Arg}(z)$.

Exemples:

- Pour $z = 3 + 4i$, on a $|z| = 5$, tandis que $\text{Arg}(z)$ est l'unique réel $\theta \in]-\pi; +\pi]$ vérifiant $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\sin \theta = \frac{4}{5}$.
- Pour $z_1 = 5 + 5i$, on a $|z_1| = 5\sqrt{2}$ et $\text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{4}$.
- Pour $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_3 = \sqrt{3} + i$, on a $|z_2| = |z_3| = 2$ tandis que $\text{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{3}$, $\text{Arg}(z_3) = \frac{\pi}{6}$.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Notation d'Euler:

- Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| = 1$, z est de la forme $\cos \theta + i \sin \theta$ pour un certain réel θ (unique modulo 2π). On écrira

$$z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

- Exemples: $e^{i0} = e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$,
 $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Plus généralement, pour $z, z' \in \mathbb{C}$ non nuls, il existe $\rho, \rho' > 0$ (uniques) et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ (uniques modulo 2π) tels que

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \quad z' = \rho'(\cos \theta' + i \sin \theta') = \rho' e^{i\theta'}$$

On aura $z = z'$ ssi $\rho = \rho'$ et $\theta \equiv \theta' [mod 2\pi]$.

- Dans cette notation, les multiplications et divisions se formulent très aisément:

$$zz' = \rho\rho' e^{i\theta} e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}, \quad \frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$$

- Exemples: $z_1 = 5 + 5i = 5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$,
 $z_3 = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$,

$$z_1 z_2 = \quad , z_1 z_3 = \quad ,$$

$$z_1/z_2 = \quad , z_1/z_3 =$$

- **Formules d'Euler:**

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

- **Formule de De Moivre:** pour $z = e^{i\theta}$, on a

$$z^n = (e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

V- Applications.

- **Formules trigonométriques** : d'après M. De Moivre,

$$\cos n\theta = \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}[(\cos \theta + i \sin \theta)^n] = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \theta)^k (i \sin \theta)^{n-k} \right]$$

$$\sin n\theta = \operatorname{Im}(e^{in\theta}) = \operatorname{Im}[(\cos \theta + i \sin \theta)^n] = \operatorname{Im} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \theta)^k (i \sin \theta)^{n-k} \right]$$

Ainsi aura-t-on, par exemple (*formules de multiplication angulaire*) :

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, \quad \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

ou encore

$$\cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1, \quad \sin 4\theta = 8 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin \theta$$

mais aussi (*formules de linéarisation*) :

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{8} (3 + \cos \theta + 4 \cos 2\theta), \quad \sin^4 \theta = \frac{1}{8} (3 + \cos 4\theta - 4 \cos 2\theta)$$

- N'importe quelle équation algébrique (polynomiale de degré 2, 3, 4 ou plus!) admet des solutions dans \mathbb{C} : on dit que le corps des nombres complexes (\mathbb{C}) est **algébriquement clos**.

Pour les équations de degré 2, 3 ou 4 on dispose de *formules de présentation explicite* des solutions.

Cas du degré 2:

étant donnés $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ se résout explicitement en calculant le *discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$ puis en se donnant $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$; les solutions sont alors

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Ex. : les solutions complexes de l'équation quadratique $z^2 - z + 1 = 0$ peuvent être explicitées une fois constaté que

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 = \delta^2 \text{ pour } \delta = i\sqrt{3},$$

ce qui nous donne ici : $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$

Cas du degré 3:

par un changement de variable approprié, l'équation cubique $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ (où $a \neq 0$) pourra être transformée en

$$Z^3 + pZ + q = 0$$

et cette dernière équation admet trois solutions Z_0, Z_1, Z_2 données par $Z_k = U_k + V_k$ ($k = 0, 1, 2$), avec

$$U_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}} \right)}, \quad V_k = e^{-i\frac{2k\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}} \right)}$$

pour $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$.

Ex. : en posant $Z = z - \frac{1}{3}$, on transforme l'équation cubique $6z^3 - 6z^2 + 12z + 7 = 0$ en une équation du même type mais plus abordable, à savoir : $54Z^3 + 90Z + 95 = 0$, et ayant pour solutions

$$Z_0 = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}} - \sqrt[3]{50} \right), \quad Z_1 = \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{3} \sqrt[3]{\frac{5}{2}} - \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{3} \sqrt[3]{50}, \quad Z_2 = \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{3} \sqrt[3]{\frac{5}{2}} - \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{3} \sqrt[3]{50}$$

Polynômes

I- Les espaces $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

- On appelle *polynôme réel* toute fonction $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ du type

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m = \sum_{k=0}^m a_kX^k,$$

où a_0, a_1, \dots, a_m sont des constantes réelles.

Si $a_m \neq 0$, on dira en outre que P est de degré m , notation: $d^o(P) = m$.

- On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace de tous les polynômes réels. $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} : on peut combiner linéairement les polynômes.

- Bien sûr, on peut aussi *multiplier* deux polynômes: si

$P_1(X) = \sum_{k=1}^m a_k X^k$, $P_2(X) = \sum_{l=1}^n b_l X^l$, alors $P_1 P_2$ est le polynôme donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [P_1 P_2](x) = P_1(x) P_2(x)$$

Pour $P_3(X) = [P_1 P_2](X) = \sum_{p=1}^{m+n} c_p X^p$, on a donc $d^o(P_3) = d^o(P_1) + d^o(P_2)$, et le coefficient de X^p dans $P_1 P_2$ vaut

$$c_p = \sum_{k+l=p} a_k b_l$$

- On appelle aussi *valuation* du polynôme $P = \sum_{k=1}^m a_k X^k$ le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$, en sorte que $Val(P_1 P_2) = Val(P_1) + Val(P_2)$. (Par convention: $d^o(0) = -\infty$, $Val(0) = +\infty$).
- Enfin, on dira que le pol. P_1 divise le pol. P_2 et l'on écrira $P_1 | P_2$ s'il existe un pol. Q pour lequel $P_2 = P_1 Q$.

Degré:
plus haute
puissance

valuation.

indice de
associé au
plus petit k
tel que $a_k \neq 0$

• Quelques exemples:

1. $P_1(X) = (X - 1)$ divise $P_2(X) = (X^2 - 1)$, car

$$P_2(X) = (X^2 - 1) = (X - 1)(X + 1) = P_1(X)Q(X)$$

pour $Q(X) = X + 1$.

2. $P_1(X) = (X^2 + X + 1)$ divise $P_2(X) = (X^3 - 1)$, car

$$P_2(X) = (X^3 - 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)$$

3. Par contre $P_1(X) = (X^2 + 2X + 1)$ ne divise pas

$P_2(X) = (X^4 + 1)$, car $P_1(-1) = 0$ tandis que $P_2(-1) \neq 0$.

4. $P_1(X) = (5X^2 + 5X + 5)$ divise $P_2(X) = (X^2 + X + 1)$, c'est plutôt trivial ($P_2(X) = \frac{1}{5} \cdot P_1(X)$);

par contre $(X + 1)$ ne risque pas de diviser $(X^2 + X + 1)$, puisque $(X + 1)|_{X=-1} = 0$ tandis que $(X^2 + X + 1)|_{X=-1} \neq 0$.

$$P_1 | P_2 \iff \text{racines}(P_1) \subset \text{racines}(P_2)$$

$$\exists r \text{ tq } P_1(r) = 0 \text{ et } P_2(r) \neq 0 \implies P_1 \nmid P_2$$

- **Remarques et définitions supplémentaires:**

1. On appellera *racine* ou *zéro* du polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tout nombre $r \in \mathbb{R}$ tel que $P(r) = 0$.
2. Nous avons constaté que pour deux pol. $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$(P_1(X)|P_2(X)) \implies (\text{Racines}(P_1) \subset \text{Racines}(P_2))$$

Attention, la réciproque n'est pas exacte! On peut avoir $\text{Racines}(P_1) \subset \text{Racines}(P_2)$ sans pour autant que $P_1|P_2$.

3. Nous avons aussi constaté que si $d^o(P_1) = 0$ alors $P_1|P_2$, de même que si P_1 est un multiple constant (non nul) de P_2 .

Si le polynôme non constant P_2 n'a pas d'autre diviseur que ces diviseurs triviaux, on dira que P_2 est *irréductible*, sinon il est *réductible*.

C'est l'exact analogue de la notion de nombre premier dans \mathbb{Z} !

- Si $P(X) = \sum_{k=1}^m a_k X^k$ est de degré m , on appellera coefficient dominant de P le coefficient a_m , noté aussi $Dom(P)$. Lorsque $Dom(P) = 1$, on dira que P est un polynôme unitaire.

$P(X) = 3 + 2X + X^2$ est unitaire

- **Théorème**

- ◇ Soit $P(X) = \sum_{k=1}^m a_k X^k$ un polynôme réel non constant. Alors:

$(P \text{ est irréductible}) \Leftrightarrow (d^o(P) = 1 \text{ ou } (d^o(P) = 2 \text{ et } Racines(P) = \emptyset))$
 $\hookrightarrow aX^2 + bX + c \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0$

- ◇ Un polynôme non constant quelconque $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ se décompose de manière unique (à l'ordre près des facteurs) sous la forme

$$P(X) = A \cdot P_1(X)^{\nu_1} P_2(X)^{\nu_2} \dots P_n(X)^{\nu_n},$$

où A est une constante non nulle et où les pol.

$P_1(X), P_2(X), \dots, P_n(X)$ sont irréductibles et unitaires.

Division: $\exists Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tq
 $P_1(X) = Q(X)P_2(X) + R(X)$
 $\deg R < \deg(P_2)$

• **Exemples et Remarques:**

1. $(3X^3 - 3) = 3(X^3 - 1) = 3(X - 1)(X^2 + X + 1)$
2. $(X^4 + 1) = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$,
 $(X^4 + \frac{5}{2}X^3 + 2X + 1) = (X + 1)^2(X^2 + \frac{1}{2}X + 1)$.
3. De même que le **Théorème Fondamental de l'Arithmétique** ("Tout nombre entier $n \geq 2$ se décompose comme produit de puissances de premiers, de manière unique à l'ordre près des facteurs") permet de définir les notions de PGCD et de PPCM dans \mathbb{Z} , le **Thm précédent** permet de définir les notions de **PGCD** et de **PPCM** dans $\mathbb{R}[X]$!
4. **Ex.:** pour $P_1(X) = X^2 - 1$ et $P_2(X) = X^3 - 1$ on obtient
 $PGCD(P_1; P_2) = (X - 1)$, $PPCM(P_1; P_2) = (X^2 - 1)(X^2 + X + 1)$

- On appelle *polynôme complexe* toute fonction $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_m z^m = \sum_{k=0}^m \alpha_k z^k,$$

Dans (un polynôme de degré m)

où $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont des constantes complexes.

L'espace de tous les polynômes complexes est noté $\mathbb{C}[X]$.

Les notions de degré et de valuation, de coeff. dominant, de division, de polynôme irréductible sont définies dans $\mathbb{C}[X]$ comme dans $\mathbb{R}[X]$.

Par ex.: le pol. non constant $P \in \mathbb{C}[X]$ sera dit *irréductible* si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{C}[X]$ sont les constants non nuls et les multiples de P par un constant non nul.

- On a l'inclusion naturelle $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$: si

$P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, P peut être étendu au domaine complexe:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m = \sum_{k=0}^m a_k z^k$$

- Si P est un pol. à coefficients réels, P peut donc aussi être considéré comme un pol. complexe! Il faut donc faire attention à ne pas laisser d'ambiguïté dans notre façon de parler. Par exemple: $(X^2 + 1)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et ne l'est pas dans $\mathbb{C}[X]$. Il convient donc de préciser si l'on se place dans $\mathbb{R}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$!

- **Théorème Fondamental de l'Algèbre:**

Dans $\mathbb{C}[X]$, les seuls polynômes irréductibles sont ceux de degré 1.

- Formulation équivalente de ce Théorème: un polynôme complexe non constant admet au moins une racine (dans \mathbb{C}).

- **Conséquence:**

Un pol. non constant $P \in \mathbb{C}[X]$ se factorise de manière unique (à l'ordre près des facteurs) sous la forme

$$P(X) = A \cdot P_1(X)^{\nu_1} P_2(X)^{\nu_2} \dots P_n(X)^{\nu_n},$$

où $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et où les pol. $P_1(X), P_2(X), \dots, P_n(X)$ sont unitaires et de degré 1.

II- Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Tout comme dans \mathbb{Z} , on a une notion de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), où la notion de *valeur absolue d'un nombre entier* est remplacée par celle de *degré d'un polynôme*.

- **Théorème:**

Etant donnés deux polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ avec $P_2 \neq 0$, il y a un unique couple $(Q; R)$ de polynômes satisfaisant les conditions

$$\begin{cases} P_1(X) = Q(X)P_2(X) + R(X) \\ d^\circ(R) < d^\circ(P_2) \end{cases}$$

Q est appelé quotient de la division (euclidienne) de P_1 par P_2 , et R est le reste de cette division.

• Exemple de division euclidienne:

1. Pour $P_1(X) = 3X^5 + X^4 - 6X^2 + 5X - 1$ et $P_2(X) = 2X^3 - X + 1$ on obtient

$$\begin{array}{r}
 3X^5 + X^4 - 6X^2 + 5X - 1 \quad \left| \begin{array}{l} 2X^3 - X + 1 \\ \hline \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{4} \\ \hline \frac{3}{2}X^3 - 7X^2 + \frac{9}{2}X - 1 \\ \hline -\left(\frac{3}{2}X^3 - \frac{3}{4}X + \frac{3}{4}\right) \\ \hline -7X^2 + \frac{21}{4}X - \frac{7}{4} \end{array} \right. \\
 -\left(3X^5 - \frac{3}{2}X^3 + \frac{3}{2}X^2\right) \\
 = X^4 + \frac{3}{2}X^3 - \frac{15}{2}X^2 + 5X - 1 \\
 -\left(X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X\right) \\
 = \frac{3}{2}X^3 - 7X^2 + \frac{9}{2}X - 1 \\
 -\left(\frac{3}{2}X^3 - \frac{3}{4}X + \frac{3}{4}\right) \\
 = -7X^2 + \frac{21}{4}X - \frac{7}{4}
 \end{array}$$

$\begin{array}{l} \text{Q}(X) \\ \left(\frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{4}\right) P_2(X) \\ + \left(-7X^2 + \frac{21}{4}X - \frac{7}{4}\right) \\ \text{R}(X) \end{array}$

$\rightarrow P_1(X) = \left(\frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{4}\right) P_2(X) + \left(-7X^2 + \frac{21}{4}X - \frac{7}{4}\right)$

- **Algorithme d'Euclide dans $\mathbb{K}[X]$:**

Tout comme dans le cas des entiers, on pourra calculer rapidement le PGCD de deux polynômes P_1 et P_2 en effectuant la div. euclidienne de P_1 par P_2 , puis celle de P_2 par R_1 (reste de la div. de P_1 par P_2), puis celle de R_1 par R_2 ... jusqu'à tomber sur un reste non nul R_N ! Puisque

$$PGCD(P_1; P_2) = PGCD(P_2; R_1) = PGCD(R_1; R_2) = \dots = PGCD(R_{N-1}; R_N)$$

on a bien au final: $PGCD(P_1; P_2) = R_N$.

- **Exemples de calculs euclidiens de PGCD:**

◇ En reprenant l'exemple où $P_1(X) = 3X^5 + X^4 - 6X^2 + 5X - 1$ et $P_2(X) = 2X^3 - X + 1$, on aboutit à

Ici $PGCD(P_1; P_2) = 1$. On dit que P_1 et P_2 sont premiers entre eux.

(Noter: ...)

◇ Dans le cas de $P_1(X) = X^8 - 1$ et $P_2(X) = X^3 - 1$, on obtient

Ces deux pol. ne sont donc pas premiers entre eux.

III- Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$, formule de Taylor

- Rappelons que le *polynôme dérivé* de $P(X) = \sum_{k=1}^m a_k X^k$ est $P'(X) = \sum_{k=1}^m k a_k X^{k-1}$.
- Par construction: $d^o(P') = d^o(P) - 1$, P' est impair si P est pair, pair si P est impair.
- La dérivation définit une application linéaire sur $\mathbb{K}[X]$, avec en outre les règles suivantes:

$$[PQ]' = P'Q + PQ', \quad [P(Q(X))]' = P'(Q(X)) \times Q'(X)$$

(*règle du produit et règle de la composition*).

- Remarquons que si l'on se place en $x_0 = 0$, les coefficients a_0, a_1, \dots, a_m du pol. P peuvent être retrouvés par dérivations successives:

$$a_0 = P(0), a_1 = P'(0), a_2 = \frac{1}{2}P''(0), \dots, a_k = \frac{1}{k!}P^{(k)}(0), \dots, a_m = \frac{1}{m!}P^{(m)}(0)$$

- Cette dernière remarque se généralise en une magnifique formule dans le cas où $x_0 \in \mathbb{K}$ est quelconque!

Formule de Taylor en x_0 :

Si $P(X) = (\sum_{k=1}^m a_k X^k) \in \mathbb{K}[X]$ est un pol. de d^o m alors pour tout $x_0 \in \mathbb{K}$ on a l'identité

$$P(X) = \sum_{k=1}^m \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k$$

- On dira donc que $x_0 \in \mathbb{K}$ est *racine d'ordre k* du pol. P si

$$(X - x_0)^k \mid P \text{ et } (X - x_0)^{k+1} \nmid P$$

ou encore si

$$P(x_0) = P'(x_0) = \dots = P^{(k-1)}(x_0) = 0 \text{ et } P^{(k)}(x_0) \neq 0$$

• **Exemples:**

◇ $(X^4 - 1) = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$, donc les seules racines réelles de $(X^4 - 1)$ sont -1 et 1 , qui sont simples. Les racines complexes $-i$ et i de $(X^4 - 1)$ sont simples elles aussi.

◇ $(X^5 - 2X^3 + X) = X(X^2 - 1)^2 = X(X - 1)^2(X + 1)^2$, donc 0 est racine simple de $(X^5 - 2X^3 + X)$, tandis que -1 et 1 en sont racines doubles. Développement de Taylor de $(X^5 - 2X^3 + X)$ en $x_0 = 1$:
puisque ...

Développements Limités

Dans tout ce chapitre, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

I- Rappels sur la Dérivation.

• $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue en* $x_0 \in I$ si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes dans I et convergeant vers x_0 , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est encore convergente et de limite $f(x_0)$. En notation mathématique:

$$\forall (u_n)_{n \geq 0} \in I^{\mathbb{N}}, \quad \left(u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0 \right) \implies \left(f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x_0) \right)$$

• f est dite *continue sur* I si elle est continue en chaque $x_0 \in I$ (Notation: $f \in \mathcal{C}^0(I)$).

• $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *dérivable en* $x_0 \in I$ si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes dans $I \setminus \{x_0\}$ et convergeant vers x_0 , la suite $\left(\frac{f(u_n) - f(x_0)}{u_n - x_0}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est encore convergente, avec une limite $f'(x_0)$ ne dépendant pas du choix de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De manière équivalente:

$$\forall (h_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}, \quad \left(h_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0\right) \implies \left(\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f'(x_0)\right)$$

Cette limite $f'(x_0)$ est appelée nombre dérivé de f en x_0 , c'est la pente de la tangente au graphe de f passant par $(x_0; f(x_0))$.

- $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *dérivable sur I* si f est dérivable en chaque $x_0 \in I$. La fonction dérivée f' de f est alors définie sur I .
Si la fonction dérivée $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est elle-même continue sur I , on dira que f est *continûment dérivable* sur I , notation: $f \in \mathcal{C}^1(I)$.
- Plus généralement, si les dérivées successives $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ sont bien définies sur I et si $f^{(n)} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est elle-même continue, on dira que f est *de classe $\mathcal{C}^{(n)}$* sur I , notation: $f \in \mathcal{C}^{(n)}(I)$.
- Enfin si f est indéfiniment dérivable sur I , on dira que f est *de classe \mathcal{C}^∞* sur I , notation: $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

De toute évidence:

$$\mathcal{C}^0(I) \supset \mathcal{C}^1(I) \supset \mathcal{C}^2(I) \supset \dots \supset \mathcal{C}^{(n)}(I) \supset \mathcal{C}^{(n+1)}(I) \dots,$$

$$\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{C}^{(n)}(I)$$

• Exemples:

1. Les fonctions usuelles \exp , Ch , Sh , \cos , \sin sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , avec

$$\exp' = \exp, \text{Ch}' = \text{Sh}, \text{Sh}' = \text{Ch}, \cos' = -\sin, \sin' = \cos$$

2. $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$, par contre en 0 elle n'est pas même dérivable.
3. $x \mapsto |x|$ est dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, et $x \mapsto |x|^3$ dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$.
4. $x \mapsto \tan(x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, la fonction réciproque $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

- **Rappel: quelques règles de calcul**

$$(fg)' = f'g + fg', (g \circ f)' = (g' \circ f) f', (e^f)' = f' e^f, (\ln |f|)' = \frac{f'}{f}, (f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f'$$

- **Rappel: le Thm des Accroissements Finis**

Si $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, alors

$$\exists c \in]a; b[, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- **Deux applications du Thm des AF:**

$$(f \in \mathcal{C}^1(I) \text{ et } f' \geq 0 \text{ sur } I) \implies (f \text{ croissante sur } I)$$

$$(f \in \mathcal{C}^2(I) \text{ et } f'' \geq 0 \text{ sur } I) \implies (f \text{ convexe sur } I)$$

II- Formules de Taylor à l'ordre n .

- **Fonctions négligeables:** Etant données deux fonctions $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, on dira que $g(x)$ est négligeable devant $f(x)$ pour $x \sim x_0$ et l'on écrira $g(x) = o_{x_0}(f(x))$ ou $g(x) = o(f(x))$ si

$$g(x) = f(x)\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

- **Exemples célèbres:** pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, on a

$$|\ln|x||^\alpha = o_0(|x|^{-\beta}), \quad x^\gamma = o_{+\infty}(e^{\delta x}), \dots$$

- **Autre exemple important:** affirmer que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = l_0$ revient à écrire

$$f(x) - f(x_0) - l_0(x - x_0) = o_{x_0}(|x - x_0|)$$

ou encore

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

• Formule de Taylor à l'ordre n en x_0 :

Si f est de classe C^{n+1} sur I et $x_0 \in I$, on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n)$$

Plus précisément, pour tout $x > x_0$:

$$\exists c \in]x_0; x[, \quad f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

• Exemples célèbres: pour $x \sim 0$, on a

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

2. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

3. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

4. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

- Pour f est de classe C^{n+1} sur I et $x_0 \in I$,

$$\begin{aligned} P_n(X) &= f(x_0) + f'(x_0)(X - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(X - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(X - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(X - x_0)^k \end{aligned}$$

est appelé *Polynôme de Taylor* de f à l'ordre n en x_0 .

On dit que P_n fournit un *Développement Limité* de f à l'ordre n en x_0 .

III- Pratique du Calcul de Développements Limités

Etant donnée $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{n+1} et $x_0 \in I$, remarquons que le polynôme de Taylor P_n vérifie:

1. $d^o(P_n) \leq n$
2. Si f est paire et si $x_0 = 0$, alors $P_n(X)$ est pair.
3. Si f est impaire et si $x_0 = 0$, alors $P_n(X)$ est impair.

Exemples: pour $x \sim x_0$

1. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$
3. $\text{Ch}x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$
4. $\text{Sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$

$$\begin{array}{l} \text{pair } f(-x) = f(x) \\ \text{impair } f(-x) = -f(x) \end{array}$$

• Règles essentielles:

1. Somme: $P_n \{f + g\} = P_n \{f\} + P_n \{g\}$
2. Produit: $P_n \{fg\}$ s'obtient en tronquant $P_n \{f\} \cdot P_n \{g\}$ à l'ordre n .
3. Quotient: à supposer que $v = \text{Val}(P_n \{g\}) \leq \text{Val}(P_n \{f\})$, $P_n \{f/g\}$ s'obtient en effectuant la division suivant les puissances croissantes de $P_{n+v} \{f\}$ par $P_{n+v} \{g\}$ à l'ordre n .
4. Composée: à supposer que g admette un Développement Limité à l'ordre n en $y_0 = f(x_0)$, celui de $g \circ f$ en x_0 s'obtient en tronquant $(P_n \{g\} \circ P_n \{f\})$ à l'ordre n .
5. Dérivée: si $P_n \{f\}$ fournit un D.L. pour f à l'ordre n en x_0 , alors $P'_n \{f\}$ fournit un D.L. pour f' à l'ordre $(n - 1)$ en x_0 .
6. Primitive: si F est une primitive de f sur I , alors $P_{n+1} \{F\}$ est la primitive de $P_n \{f\}$ prenant la valeur $F(x_0)$ en x_0 .

On fait de produit et on garde que le terme d'ordre n ?

• Exemples:

1. L'identité $\operatorname{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ permet de retrouver rapidement le D.L.

$$\operatorname{Ch}x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

à partir du D.L. en 0 de la fonction exponentielle.

2. De même, l'identité $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ permet de retrouver

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

3. D.L. de $x \mapsto \sin x \ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0:

$$\sin x \ln(1+x) = \dots + o(x^4)$$

4. D.L. de $x \mapsto \ln(\cos x)$ à l'ordre 5 en 0:

$$\ln(\cos x) = \quad \quad \quad +o(x^5)$$

5. D.L. de \tan à l'ordre 4 en 0: 2 méthodes envisageables!

$$\tan x = \quad \quad \quad +o(x^4)$$

IV- Applications des Développements Limités

- Imaginons que $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont telles que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

Alors l'existence de $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ n'est pas garantie (on a une *forme indéterminée*).

Toutefois: si f et g admettent les D.L. $P_n \{f\}$ et $P_n \{g\}$ à l'ordre n en x_0 et si $Val(P_n \{g\}) \leq Val(P_n \{f\})$, alors cette limite existe et le comportement de f/g au voisinage de x_0 peut même être analysé jusqu'à l'ordre n .

Exemples célèbrissimes au voisinage de $x_0 = 0$:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, plus précisément

$$\frac{\sin x}{x} =$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, plus précisément

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} =$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1+x)} = 1$, plus précisément

$$\frac{\tan x}{\ln(1+x)} =$$

- Imaginons que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ soit telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -\sin(f(x))$$

On ne connaît pas f exactement, mais on voudrait comprendre son comportement au voisinage de $x_0 = 0$.

↪ *Possibilité*: on considère un D.L. de f à l'ordre n en 0:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n) \\ &= P_n(x) + o(x^n) \end{aligned}$$

puis on applique la règle de composition afin de déterminer les valeurs de a_2, a_3, \dots, a_n (on sait déjà que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$).

$$P(x) = x^5 - 2x^3 + x = \sum_{k=0}^5 a_k x^k$$

$$P'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$$

$$P''(x) = 20x^3 - 12x$$

$$P'''(x) = 60x^2 - 12$$

$$P^{(4)}(x) = 120x$$

$$P^{(5)}(x) = 120$$

$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ où $a_0 = 0$
 $a_1 = 1$
 $a_2 = 0$
 $a_3 = -2$
 $a_4 = 0$
 $a_5 = 1$

$P(0) = 0$
 $P'(0) = 1$
 $P''(0) = 0$
 $P'''(0) = -12$
 $P^{(4)}(0) = 0$
 $P^{(5)}(0) = 120$

$\frac{-12}{5!}$
 $\frac{120}{5!}$

Une racine double :
 Racine double
 deux autres de
 degré 1 :
 Racine double :
 tangente
 racine simple : parabole

Equations Différentielles

I- Définitions élémentaires.

- On appelle *Equation Différentielle Ordinaire (EDO)* toute équation (E) du type

$$(E) : \quad y^{(n)}(t) = F(t; y(t); y'(t); y''(t); \dots; y^{(n-1)}(t))$$

où l'inconnue est une fonction suffisamment régulière $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ($y \in C^n(I)$) et où $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de $(n+1)$ variables (F est définie sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$).

L'entier n est appelé *ordre* de l'EDO considérée.

- L'EDO (E) sera dite *linéaire* lorsque F dépend linéairement de $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, non-linéaire sinon.
- (E) sera dite *autonome* si la fonction F ne dépend pas de la variable t .
- (E) sera dite *homogène* si $y \equiv 0$ est sol. de (E) , inhomogène sinon.

↳ y
constamment nulle

- Exemples:

1. L'Equation du Pendule

$$y''(t) = -\omega^2 \sin(y(t))$$

est non-linéaire, autonome, d'ordre 2, homogène.

2. L'Equation logistique

$$y'(t) = y(t) (a - by(t))$$

est non-linéaire, autonome, d'ordre 1, homogène.

• Exemples (suite):

si t est fixé, c'est
linéaire

3. L'Equation

$$ty'(t) + y(t) = \cos t$$

est linéaire d'ordre 1 et inhomogène.

4. L'Equation (satisfaite par l'intensité dans un circuit RLC)

$$Ly''(t) + Ry'(t) + \frac{1}{C}y(t) = K \cos \omega t$$

est linéaire d'ordre 2 et inhomogène, à coefficients constants.

5. L'Equation

$$ty''(t) + 2y'(t) - ty(t) = 0$$

est linéaire d'ordre 2 et homogène, à coefficients non constants.

• Propriétés importantes des EDO linéaires:

On considère une EDO linéaire (E) donnée par

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)y^{(n-2)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) + f(t),$$

les fonctions $f, a_0, \dots, a_{n-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ étant définies et continues sur l'intervalle ouvert I .

L'Equation homogène associée à (E) est alors l'Eq. (E_H) donnée par

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)y^{(n-2)}(t) + \dots + a_0(t)y(t),$$

et les solutions de (E) et (E_H) vérifient

1. *Existence d'une solution:*

L'Equation (E) admet au moins une solution $y_P \in \mathcal{C}^n(I)$.

2. *Principe de superposition:*

si $y_P \in \mathcal{C}^n(I)$ est solution de (E) et si y_H est solution de l'équation homogène associée (E_H) , alors $(y_P + y_H)$ est solution de (E) .

3. Solutions de (E_H) :

l'espace \mathcal{S}_H de toutes les solutions de (E_H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I)$ de dimension n . Etant donnés $t_0 \in I$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ base de \mathbb{R}^n , il existe des solutions $y_1, y_2, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ de (E_H) satisfaisant respectivement

$$\begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_1'(t_0) \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = e_1, \dots, \begin{pmatrix} y_k(t_0) \\ y_k'(t_0) \\ \dots \\ y_k^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = e_k, \dots, \begin{pmatrix} y_n(t_0) \\ y_n'(t_0) \\ \dots \\ y_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = e_n,$$

et ces solutions constituent une base (y_1, y_2, \dots, y_n) de \mathcal{S}_H .

↪ Exemple dans le cas du circuit *RLC* :

II- Cas des EDO linéaires d'ordre 1.

Rappelons qu'une telle EDO se présente sous la forme

$$(E) : \quad y'(t) = a(t)y(t) + f(t)$$

et que l'équation homogène associée s'écrit

$$(E_H) : \quad y'(t) = a(t)y(t)$$

(Les fonctions a et f sont définies et continues sur l'intervalle ouvert I).

A supposer qu'une solution $y \in \mathcal{C}(I)$ ne s'annule pas sur I , on aura

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = a(t)$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dt} \ln(|y(t)|) = a(t), = \left[\ln(|y(t)|) \right]' = a(t)$$

puis

$$y(t) = Ke^{A(t)} = Ke^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$$

pour une certaine constante $K \neq 0$, A désignant une primitive de a .
Réciproquement, étant donné $K \in \mathbb{R}$ arbitraire, la fonction

$$y(t) = Ke^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = Ke^{A(t)}$$

est bien de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle I et solution de (E_H) . En fait:

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y_K : t \mapsto Ke^{\int_{t_0}^t a(s)ds}; K \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarquons que pour tout $K \in \mathbb{R}$, y_K est la solution de (E_H) satisfaisant la condition $y(t_0) = K$.

Pour trouver une solution particulière $y_{Part.}$ de l'équation inhomogène (E) , il reste à appliquer la méthode de la *Variation de la Constante*: si $y(t) = k(t)e^{A(t)} = k(t)y_1(t)$ est solution, on a

$$y'(t) = k'(t)y_1(t) + k(t)y_1'(t) = k'(t)y_1(t) + k(t)a(t)y_1(t) = a(t)y(t) + f(t)$$

puis

$$k'(t) = \frac{f(t)}{y_1(t)} = f(t)e^{-A(t)}$$

Ainsi:

$$y_{Part.}(t) = \left\{ \int_{t_0}^t f(u)e^{-A(u)} du \right\} e^{A(t)}$$

définit une solution particulière de (E) , et l'ensemble de toutes les solutions de (E) s'obtient en ajoutant à cette solution particulière n'importe quelle solution y_K de (E_H) :

$$y(t) = \left\{ K + \int_{t_0}^t f(u)e^{-A(u)} du \right\} e^{A(t)}$$

• Exemples:

1. $(2+t)y'(t) = 2 - y(t)$ (E) : $y'(t) = -\frac{1}{2+t}y(t) + \frac{2}{2+t}$

(E_h) : $y'(t) = -\frac{1}{2+t}y(t) \Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{2+t} = (\ln|k_2(t)|)'$

$\Leftrightarrow \ln|k_2(t)| = -\ln(2+t) + C$
 $\Leftrightarrow |y(t)| = e^C \cdot e^{-\ln(2+t)} \rightarrow$ Méthode de variation de la constante.
 $= \frac{1}{2+t} \Leftrightarrow y(t) = \frac{K}{2+t}$ $y(t) = \frac{k(t)}{2+t}$ et $y'(t) = \frac{k'(t)}{2+t} - \frac{k(t)}{(2+t)^2}$

2. $t^3y'(t) - t^2y(t) = 1$

$= \frac{2-t}{2+t} \times y(t)$
 $k(t) = 2t + C, y(t) = \frac{2t+C}{2t}$

3. $ty'(t) + y(t) = \cos t$

III- EDO linéaires à coeff. constants.

On considère maintenant (E) donnée par

$$(E) : \quad a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t),$$

(où $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $f \in \mathcal{C}^0(I)$) ainsi que l'équation homogène associée

$$(E_H) : \quad a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

Rappelons que l'ensemble \mathcal{S}_H des solutions de (E_H) constitue un espace vectoriel de dimension n (ordre de l'équation).

↪ *Ansatz* pour la résolution de (E_H) : essayons de trouver une solution y de la forme $y(t) = e^{\lambda t}$. Puisque

$$y'(t) = \lambda y(t), y''(t) = \lambda^2 y(t), \dots, y^{(n)}(t) = \lambda^n y(t)$$

et que y ne s'annule pas, on obtient

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

soit $\chi_E(\lambda) = 0$, si l'on introduit le **polynôme caractéristique**

$$\chi_E(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

de l'équation (E) .

↔ *Réciproquement*: si $\lambda \in \mathbb{R}$ est racine d'ordre k de χ_E , càd

$$(X - \lambda)^k \mid \chi_E(X), \quad (X - \lambda)^{k+1} \nmid \chi_E(X),$$

alors on vérifie que

$$y_{\lambda;0} : t \longmapsto e^{\lambda t}, y_{\lambda;1} : t \longmapsto te^{\lambda t}, \dots, y_{\lambda;k-1} : t \longmapsto t^{k-1}e^{\lambda t}$$

constituent k solutions linéairement indépendantes de (E_H) !

Question: qu'en est-il si $\lambda = \alpha + i\omega$ est une racine complexe du polynôme caractéristique χ_E (avec $\omega \neq 0$)?

$$y_{\lambda;0} : t \mapsto e^{\lambda t} = e^{\alpha t} e^{i\omega t} = e^{\alpha t} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

est une fonction à *valeurs complexes* satisfaisant

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

de même que

$$y_{\lambda;1} : t \mapsto t e^{\lambda t}, y_{\lambda;2} : t \mapsto t^2 e^{\lambda t}, \dots, y_{\lambda;k-1} : t \mapsto t^{k-1} e^{\lambda t}$$

si λ est racine d'ordre k du *polynôme caractéristique* χ_E .

En combinant ces solutions avec leurs conjuguées complexes, on pourra obtenir en tout $2k$ solutions à *valeurs réelles* et *linéairement indépendantes* sur \mathbb{R} , à savoir

$$t \mapsto e^{\alpha t} \cos \omega t, t \mapsto t e^{\alpha t} \cos \omega t, \dots, t \mapsto t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \omega t,$$

ainsi que

$$t \mapsto e^{\alpha t} \sin \omega t, t \mapsto t e^{\alpha t} \sin \omega t, \dots, t \mapsto t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \omega t.$$

Cas des EDO linéaires à coeff. constants d'ordre 2:

(E) se présente alors sous la forme

$$ay'' + by' + cy = f,$$

où a, b, c sont des constantes réelles ($a \neq 0$) et $f \in \mathcal{C}(I)$. Le pol. caractéristique associé est donné par

$$\chi_E(X) = aX^2 + bX + c,$$

et l'on distinguera trois cas de figure:

1. Si $\Delta_E = (b^2 - 4ac) > 0$: χ_E a deux racines réelles distinctes λ_1, λ_2 , donc

$$t \longmapsto e^{\lambda_1 t} \quad \text{et} \quad t \longmapsto e^{\lambda_2 t}$$

fournissent deux solutions linéairement indépendantes de (E_H) .

2. Si $\Delta_E = (b^2 - 4ac) = 0$: χ_E a une seule racine réelle λ qui est double,

$$t \mapsto e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad t \mapsto te^{\lambda t}$$

fournissent deux solutions linéairement indépendantes de (E_H) .

3. Si $\Delta_E = (b^2 - 4ac) < 0$: χ_E a deux racines complexes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\omega$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\omega$, donc

$$t \mapsto e^{\alpha t} \cos \omega t \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{\alpha t} \sin \omega t$$

fournissent deux solutions linéairement indépendantes de (E_H) .

Ensuite: pour résoudre l'équation inhomogène (E) (avec second membre $f \in \mathcal{C}(I)$), on cherchera une solution particulière $y_{Part.}$, à laquelle n'importe quelle solution y de (E_H) pourra être ajoutée!

Exemple de l'intensité dans un circuit RLC

Dans un tel circuit, l'intensité $I = y(t)$ satisfait

$$Ly''(t) + Ry'(t) + \frac{1}{C}y(t) = f(t)$$

pour une certaine fonction $t \mapsto f(t)$, dérivée de la tension appliquée aux bornes du circuit. L'équation homogène associée est

$$(E_H) \quad Ly''(t) + Ry'(t) + \frac{1}{C}y(t) = 0,$$

et trois cas sont à distinguer, selon que

- $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, ou
- $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, ou
- $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

(les constantes R , L et C sont > 0).

Séries Numériques

I- Généralités.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou encore dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
On dira que la série $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_N)_{N \geq 0}$ donnée par

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N = \sum_{n=0}^N u_n$$

définit une suite convergente dans \mathbb{K} .

Si tel est le cas, la limite $V = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ sera appelée *valeur* de la série étudiée, et on pourra écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = V$$

- On dira d'une suite $(v_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{K} qu'elle satisfait la propriété de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies |v_{n+p} - v_n| < \varepsilon$$

- Il est relativement évident que :

toute suite convergente dans \mathbb{K} satisfait la propriété de Cauchy.

- Un **Thm Fondamental en Analyse** :

le corps de nombres $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est complet, au sens où toute suite de Cauchy sur \mathbb{R} converge dans \mathbb{R} .

Il en va de même pour le corps \mathbb{C} des nombres complexes.

- **N.B.** : en revanche, on se gardera bien de croire que \mathbb{Q} constitue un corps de nombre complet !

Ex. : méthode d'Héron d'Alexandrie la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ t.q. $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$ est de Cauchy, à termes rationnels, et cependant elle ne converge pas dans \mathbb{Q} ...

Deux conséquences de ce Thm Fondamental de complétude :

1°) Pour que la série numérique $\sum u_n$ converge, il faut que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Attention cependant, on se gardera bien de croire que la réciproque de cette dernière proposition est vraie :

il y a bien entendu des suites (u_n) convergentes de limite nulle pour lesquelles la série $\sum u_n$ s'avère être divergente !

Ex. : la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ s'avère divergente, car la suite de sommes partielles $(S_N)_{N \geq 1}$ donnée par

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

ne risque pas d'être de Cauchy ! On constate en effet que

$$S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad \forall N \geq 1, \quad |S_{2N} - S_N| \geq \frac{1}{2}$$

$$S_{2N} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} + \underbrace{\frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N}}_{S_{2N} - S_N} \geq \frac{1}{2N} \times N$$

2°) La convergence de la série à termes positifs $\sum |u_n|$ entraîne celle de $\sum u_n$ - on dira alors de la série $\sum u_n$ qu'elle est

absolument convergente.

En effet, l'inégalité triangulaire (dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C}) permet d'écrire

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad |S_{N+p} - S_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{N+p} u_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} |u_n|$$

et l'hypothèse de convergence $\sum |u_n| < +\infty$ permet alors d'affirmer que la suite des sommes partielles $(S_N)_{N \geq 0}$ est de Cauchy !

La convergence de $\sum u_n$ résulte alors d'une application du **Thm**

Fondamental à $(S_N)_{N \geq 0}$.

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n} \\ u_n = \frac{1}{n} \\ u_n \rightarrow 0 \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n^2} \\ u_n = \frac{1}{n^2} \\ u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = l < +\infty \end{aligned}$$

II- Convergence des séries réelles.

Comparaisons séries-intégrales :

Pour $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ fonction décroissante de limite nulle, posons $u_n = f(n)$. La suite (u_n) est convergente de limite nulle, mais la question de la convergence de $\sum_n u_n$ demeure a priori ouverte. Une chose est sûre : $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t) dt$ existe dans $[0; +\infty]$!

Si $L = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t) dt$ est $< +\infty$, on dira que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut L , sinon cette intégrale de fonction positive diverge et l'on pourra écrire : $\int_0^{+\infty} f(t) dt = +\infty$ pour expliciter cette divergence.

Tout aussi certainement, on doit avoir pour chaque entier $n \geq 0$, d'après la monotonie de f :

$$u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq u_n$$

Il résulte de ce dernier encadrement que

la série à terme positifs $\sum_n u_n$ converge si et ssi $\int_0^{+\infty} f(t)dt < +\infty$

Exemples célèberrissimes d'applications :

1^o) La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et ssi

$$\alpha > 1.$$

2^o) La série de Bertrand $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et ssi

$$\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

Le **critère des séries alternées** permet d'établir la convergence de séries dont les termes changent de signe.

Critère des séries alternées : Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle ≥ 0 . Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est *monotone décroissante* de limite 0, la série $\sum_n u_n$ de terme général $u_n = (-1)^n x_n$ est convergente. En outre, dans ces conditions la valeur $V = \sum_{n \geq 0} u_n$ pourra aisément être encadrée, au sens où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{2n+1} u_k \leq V \leq \sum_{k=0}^{2n} u_k$$

Exemple célébrissime d'application :

nous avons déjà vu que la série harmonique diverge.

En revanche, sa cousine la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ s'avère être convergente, et ce d'après le *critère des séries alternées*.

Et pour évaluer $V = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ à 10^{-2} près, il est certain qu'un calcul de $V = \sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ fera l'affaire !

Ex:

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$\rightarrow x_n \geq 0$
 $\rightarrow x_n$ est \searrow
 $\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$

Conclut:
 Cette série est convergente

Absolument convergente
 $\frac{1}{n}$ divergent
 \rightarrow non.

III- Critères classiques de convergence absolue.

Dans ce paragraphe, on utilisera essentiellement deux suites

$(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ à termes ≥ 0 .

Notations :

On conviendra d'écrire

$$(a_n) \preceq (b_n)$$

s'il existe une constante $K > 0$ et un rang n_0 tels que

$$\forall n \geq n_0, \quad a_n \leq K b_n$$

S'il existe deux constantes $\kappa > 0$, $K > 0$ et un rang n_0 pour lesquels

$$\forall n \geq n_0, \quad \kappa b_n \leq a_n \leq K b_n$$

on conviendra d'écrire $(a_n) \sim (b_n)$ et on dira de ces deux suites qu'elles sont *équivalentes*.

Critères de domination :

On suppose que les suites à termes positifs $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ sont telles que

$$(a_n) \preceq (b_n).$$

Alors :

la *convergence* de $\sum_n b_n$ entraîne celle de $\sum_n a_n$, tandis que la *divergence* de $\sum_n a_n$ entraîne celle de $\sum_n b_n$.

Critère d'équivalence :

On suppose que les suites à termes positifs $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ sont telles que

$$(a_n) \sim (b_n).$$

Alors :

$\sum_n a_n$ converge si et ssi $\sum_n b_n$ converge !

Cas particulier important :

Si les suites $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ sont à termes strictement positifs, et si

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

existe, alors :

1. Dans le cas où $L = 0$, la convergence de $\sum_n b_n$ entraîne celle de $\sum_n a_n$.
2. Dans le cas où $L \in]0; +\infty[$, les deux séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont forcément de même nature (soit toutes deux convergentes, soit toutes deux divergentes).

Ex. : on sait que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, ainsi est-on en

droit d'affirmer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente. $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \underbrace{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{u_n}$ converge

Avec un D.L., en 0 $\sin x = x + o(x)$
 $|\sin \frac{1}{n^2}| = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 $\frac{|\sin \frac{1}{n^2}|}{\frac{1}{n^2}} = 1 + o(1) \Rightarrow |u_n| \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série est absolument convergente.

Application des critères de comparaison : quelques résultats classiques de convergence

1. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a

$$\forall n \geq 1, 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z},$$

or, si $|z| < 1$, on aura aussi $\frac{1 - z^n}{1 - z} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - z}$. Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \implies \sum_{k \geq 0} z^k \text{ converge et } \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}$$

2. Etant donné $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on constate que $\left(\frac{|z|^n}{n}\right) \ll (|z^n|)$. En utilisant le résultat précédent, on est en mesure d'affirmer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ est absolument convergente pour tout z t.q. $|z| < 1$.

3. De même, en supposant toujours que $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| < 1$, on constate que $(\frac{|z^n|}{n!}) \ll (|z^n|)$, et le résultat de convergence de la série géométrique permet d'affirmer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout z t.q. $|z| < 1$.

Critère de d'Alembert :

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes strictement positifs, telle que

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \bullet \quad a_n = \frac{1}{n}$$

existe. Alors :

1. Si $0 \leq L < 1$, la série $\sum_n a_n$ converge.

2. Si $L > 1$, la série $\sum_n a_n$ diverge.

3. Dans le cas où $L = 1$, tout peut arriver ...

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$$

Application du critère de d'Alembert : définition de la fonction exponentielle dans le plan complexe

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, intéressons-nous à la convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

Manifestement :

$$\frac{\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{z^n}{n!} \right|} = \frac{|z|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L = 0$$

Ainsi est-on en droit d'affirmer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est *absolument convergente* pour tout nombre complexe z , ce qui fournit en fait une définition de la fonction exponentielle dans tout le plan complexe :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Critère de Cauchy :

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes strictement positifs, telle que

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln a_n}$$

existe. Alors :

1. Si $0 \leq L < 1$, la série $\sum_n a_n$ converge.
2. Si $L > 1$, la série $\sum_n a_n$ diverge.
3. Dans le cas où $L = 1$, tout peut arriver ...

(Les mêmes conclusions pourront en fait être tirées en utilisant plutôt

$$\bar{L} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} \right\},$$

l'avantage étant que \bar{L} existe à tous les coups !)

Ultimes remarques en guise de conclusion :

Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes complexes. Posons $z_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, et définissons les suites à termes ≥ 0 (x_n^+) , (x_n^-) par

$$x_n^+ = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, x_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x_n \geq 0 \\ -x_n & \text{si } x_n \leq 0 \end{cases}$$

Alors :

1. La série complexe $\sum_n z_n$ converge si et ssi chacune des séries réelles $\sum_n x_n$ et $\sum_n y_n$ converge.
2. La série réelle $\sum_n x_n$ est *absolument convergente* si et ssi $\sum_n x_n^+ < +\infty$ et $\sum_n x_n^- < +\infty$.
3. Dans la situation où $\sum_n x_n^+ < +\infty$ tandis que $\sum_n x_n^- = +\infty$, la série réelle $\sum_n x_n$ diverge. Une remarque semblable pourra être faite quant au cas où $\sum_n x_n^+ = +\infty$ tandis que $\sum_n x_n^- < +\infty$.

4. Dans le cas où $\sum_n x_n^+ = \sum_n x_n^- = +\infty$, il se peut que la série réelle $\sum_n x_n$ converge (toutefois sans converger absolument), mais il se peut aussi que $\sum_n x_n$ diverge.
5. Enfin : en remarquant que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \max(|x_n|; |y_n|) \leq |z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq |x_n| + |y_n|$$

on parvient à affirmer que

la convergence absolue de la série complexe $\sum_n z_n$ équivaut à celle des séries réelles $\sum_n x_n$ et $\sum_n y_n$.

Décomposition en élément simple

B)

$$1) \left(\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2-1} \right) \text{ converge}$$

$$\text{car } \frac{1}{k^2-1} \sim \frac{1}{k^2} \left(\text{série de Riemann avec } \alpha = 2 \right)$$

donc la convergence.

$$(x^2-1) = (x-1)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad \left| \begin{array}{l} \text{INTERDIT!} \\ \text{décomposition} \\ \text{en éléments} \\ \text{simples.} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{x+1} = A + \frac{B(x-1)}{x+1}$$

$$\text{avec } x=1, A = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{A(x+1)}{x-1} + B$$

$$\text{avec } x=-1, B = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$$

$$S_k = \sum_{k=2}^k \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^k \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$$

les termes se simplifient :

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{k+1} \right) \xrightarrow{\text{On passe à la limite}} \frac{3}{4}$$