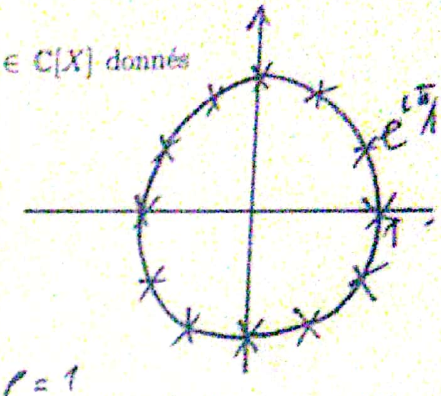
IUT de Paris Descartes, Dpt INFO

Interro "Compléments d'Analyse"
du Mercredi 13 Février 2019.
Durée: 40mn.

1. Racines de polynômes et PGCD :
Dans cet exercice, on considère les polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[X]$ donnés par

$$P_1(X) = X^{12} - 1 \text{ et } P_2(X) = X^8 + 1$$

1. Identifier précisément les racines de P_1.



$\forall z \in \mathbb{C},\ P_1(z) = 0 \iff z^{12} = 1$

En posant $z = \rho e^{i\theta}$, on a donc :

$P_1(z) = 0 \iff \rho^{12} e^{i12\theta} = 1 \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ 12\theta \equiv 0\ [\text{mod } 2\pi] \end{cases}$

D'où

$\{z \in \mathbb{C} / P_1(z) = 0\} = \{e^{ik\pi/6}\ ;\ k = 0, 1, 2, \dots, 11\}$ (Dodécagone régulier)

$= \{1, e^{i\pi/6}, e^{i\pi/3}, e^{i\pi/2}, e^{i2\pi/3}, e^{i5\pi/6}, \dots, e^{i11\pi/6}\}$

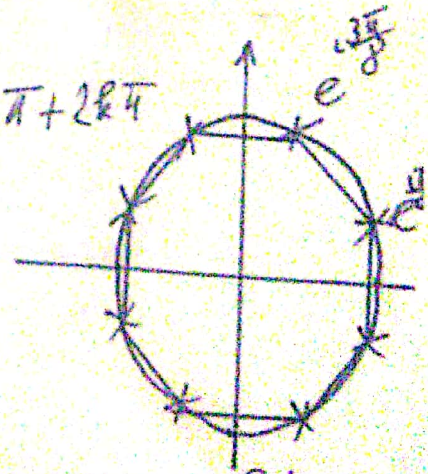
2. Identifier précisément les racines de P_2.

De même, pour $z = e^{i\theta}$:

$P_2(z) = 0 \iff z^8 = -1 \iff e^{i8\theta} = e^{i\pi}$

$\iff 8\theta \equiv \pi\ [2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 8\theta = \pi + 2k\pi$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{8} + k\pi/4$



D'où l'ensemble à 8 racines (simples)

$\{e^{i(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4})}\ ;\ 0 \le k \le 7\}$

$= \{e^{i\pi/8}, e^{i3\pi/8}, e^{i5\pi/8}, e^{i7\pi/8}, e^{i9\pi/8}, e^{i11\pi/8}, e^{i13\pi/8}, e^{i15\pi/8}\}$ (Octogone régulier)

Scanned by CamScanner

3. A partir des 2 questions précédentes, identifier rapidement le PGCD de P_1 et P_2.

Manifestement, P_1 et P_2 n'ont pas de racine commune (dans $\mathbb{C}$).

Donc : $PGCD(P_1 ; P_2) = 1$.

(P_1 et P_2 sont premiers entre eux).

4. Retrouver ce PGCD par des divisions euclidiennes successives.

$$\begin{array}{rr|l} X^{12} & -1 & X^8+1 \\ \cline{3-3} X^{12} & +X^4 & X^4 \\ \cline{1-2} -X^4 & -1 & \end{array}$$

$$(X^{12}-1) = X^4(X^8+1) - (X^4+1)$$

$$\begin{array}{rr|l} X^8 & +1 & X^4+1 \\ \cline{3-3} X^8 & +X^4 & X^4-1 \\ \cline{1-2} -X^4 & +1 & \\ -X^4 & -1 & \\ \cline{1-2} & 2 & \end{array}$$

$$(X^8+1) = (X^4-1)(X^4+1) + 2$$

Clairement : 2 constitue un DERNIER RESTE NON NUL dans nos divisions euclidiennes successives.

Donc : $\boxed{PGCD(P_1 ; P_2) = 1}$.

2. Calculs de développements limités:

(i) On rappelle que pour $x \sim 0$ et $h \sim 0$:

$$\text{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4) \text{ et } \ln(1+h) = h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}+o(h^4)$$

Utiliser ces rappels pour développer $f : x \longmapsto \ln(\text{Ch}x)$ à l'ordre 4 au voisinage de $x_0 = 0$.

Pour $x \sim x_0 = 0$:

$$\ln(\text{Ch}x) = \ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+o(x^4)$$

$$= \frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

$$\boxed{\ln(\text{Ch}x) = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}$$

(*ii*) On rappelle à présent que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Ch}'(x) = \mathrm{Sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Utiliser ce qui précède afin de développer $g : x \longmapsto \frac{\mathrm{Sh}x}{\mathrm{Ch}x}$ à l'ordre 3 au voisinage de $x_0 = 0$.

Puisque $\frac{d}{dx}\left(\ln(\mathrm{Ch}\,x)\right) = \frac{\mathrm{Ch}'\,x}{\mathrm{Ch}\,x}$

$$= \frac{\mathrm{Sh}\,x}{\mathrm{Ch}\,x},$$

on obtient :

$$\boxed{\frac{\mathrm{Sh}\,x}{\mathrm{Ch}\,x} = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

(La fonction $g : x \longmapsto \frac{\mathrm{Sh}\,x}{\mathrm{Ch}\,x}$

est connue sous le nom de tangente hyperbolique,

notée th).