IUT de Paris Descartes, Dpt INFO

Compléments d'Analyse : 1ère Feuille d'Exercices

A. Calculs divers:
Représenter chacun des nombres complexes suivants sous forme cartésienne puis sous forme polaire:

1. $z_1 = \frac{1}{1+i} - \frac{2i}{1-i}$, $\quad z_2 = \frac{1-i}{3i+(1-i)^2}$
2. $z_3 = (\frac{1+i}{1-i})^{99}$, $\quad z_4 = (\frac{2i}{1-i})^{2009}$
3. $z_5 = e^{2+3i}$, $\quad z_6 = e^{-1+2i}$

B. Calculs de racines:

1. Déterminer les racines carrées puis les racines cubiques de
$$z_1 = \sqrt{3} - i, \quad z_2 = 2i - \sqrt{3}, \quad z_3 = 2i + \sqrt{3}, \quad z_4 = \frac{2i - \sqrt{3}}{2i + \sqrt{3}}$$
2. Donner toutes les solutions complexes de
$(E_1) : z^7 + 4 = 0; (E_2) : z^6 = 64i; (E_3) : z^4 = i; (E_4) : z^3 = \sqrt{3}(-1+i)$

C. Résolutions d'équations algébriques:
Résoudre explicitement dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + \sqrt{2}z + 1 = 0$
2. $z^2 + 2iz - 4 - 4i = 0$
3. $z^2 - (4+2i)z + i - 1 = 0$
4. $(1+i)z^2 - z - (1-i) = 0$
5. $z^4 + 1 = 0$
6. $(z^2 - z - 1)^2 + (z^2+1)^2 = 0$ *(cf: $a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$).*
7. $z^4 - 2\cos\theta z^2 + 1 = 0$
8. $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$
9. $z^n = z$
10. $(z-a)^n = (z-b)^n$, où a et b sont des réels distincts.

D. Sur les entiers de Gauss:
Prouver succintement que l'ensemble des entiers sommes de 2 carrés est stable par multiplication, en déduire une identité remarquable.

E. **Représentation graphique de sous-ensembles de $\mathbb{C}$:**
Représenter les sous-ensembles suivants de $\mathbb{C}$ dans le plan:

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+i|\}, E_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-i| < 2\},$$

$$E_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, |Re(z)| \leq \frac{1}{2}, Im(z) > 0\}, E_4 = \{z \in \mathbb{C} : |(1+i)z + (1-i)| = 5\},$$

$$E_5 = \{z \in \mathbb{C} : Re(\frac{1}{z}) = 1\}, E_6 = \left\{z \in \mathbb{C} : Im(z^2) \leq 2\right\}, E_7 = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg}(1+z^2) = 0\right\}.$$

F. **Nombres complexes unimodulaires:**
Soient $u, v, w \in \mathbb{C}$ tels que $|u| = |v| = |w| = 1$.

1. Prouver que $z = w \cdot \overline{w} \frac{u+v}{1+uv}$ est réel.
2. Comparer les modules des nombres $z_1 = u+v+w$ et $z_2 = uv+vw+wu$.
3. Quand est-ce que z_1 est réel? Et z_2?

G. **Géométrie dans le plan complexe:**
Etant donnés quatre nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 (distincts 2 à 2), on définit le *rapport affine* R_A des trois nombres z_1, z_2, z_3 par

$$R_A(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

puis le rapport croisé R_C de z_1, z_2, z_3, z_4 par

$$R_C(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{R_A(z_1, z_2, z_3)}{R_A(z_1, z_2, z_4)}$$

Vérifier que

1. Les points d'affixes z_1, z_2, z_3 sont alignés si et ssi $R_A(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}$
2. Les points d'affixes z_1, z_2, z_3, z_4 sont cocirculaires ou encore alignés si et ssi $R_C(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$

En déduire que

3. Si les droites Δ et Δ' sont tangentes au cercle unité aux points d'affixes respectives ζ et ζ', dès lors que $\zeta + \zeta' \neq 0$, Δ et Δ' s'intersectent en un point d'affixe z donnée par

$$z = \frac{2}{\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta'}} = \frac{2}{\overline{\zeta} + \overline{\zeta'}}, \text{ soit encore } \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta'}\right)$$

IUT de Paris Descartes, Dpt INFO

Compléments d'Analyse : 2ème Feuille d'Exercices

A. Comparaisons de polynômes:

On considère les polynômes

$$P_1(X) = X^2-1, P_2(X) = X^4-1, P_3(X) = X^3-X, P_4(X) = X^4-X^2, P_5(X) = X^4-2X^2+1$$

1. Déterminer les racines de chacun de ces polynômes, en donnant à chaque fois leur multiplicité.
2. Quelles sont les relations de division satisfaites par ces polynômes?
3. Esquisser les graphes de chacun de ces polynômes.

B. Calculs de PGCD:

Calculer le PGCD de P_1 et P_2 pour

1. $P_1(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1, P_2(X) = X^3 + X^2 - X - 1$
2. $P_1(X) = X^4 - 10X^2 + 1, P_2(X) = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$
3. $P_1(X) = X^4 + X^3 - 2X + 1, P_2(X) = X^2 + X + 1$
4. $P_1(X) = X^3 + X^2 + 1, P_2(X) = X^3 + X + 1$

C. Calculs de restes:

Calculer les restes des divisions euclidiennes:

1. de X^{50} par $X^2 - 3X + 2$
2. de $(X + \sqrt{3})^{17}$ par $X^2 + 1$
3. de $X^8 - 32X^2 + 48$ par $(X - \sqrt{2})^3$.

D. Formule de Taylor:

1. Donner explicitement le développement de Taylor de $P(X) = X^4 - X^2$ en $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Utiliser ce développement pour esquisser le graphe de P au voisinage de $(x_0; P(x_0))$.
2. Idem pour $P(X) = X^4 - 5X^3 + 6X^2 + 4X - 8$ et $x_0 = 2$.

E. Divisions suivant les puissances croissantes:

Soient $P_1(X), P_2(X)$ deux polynômes non nuls tels que $Val(P_1) \geq Val(P_2)$.

On dira que l'on a effectué la division suivant les puissances croissantes de P_1 par P_2 à l'ordre l ($l \geq Val(P)$) si l'on a trouvé deux autres polynômes P_3 et P_4 tels que

$$d^o(P_3) \leq l \text{ et } P_1 = P_3 \cdot P_2 + X^{l+1} \cdot P_4$$

1. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $P_1(X) = 1 - X - X^3 - X^6$ par $P_2(X) = 1 - X - X^2$ à l'ordre $l = 3$.
   En déduire l'allure du graphe de $f : x \mapsto \frac{1-x-x^3-x^6}{1+x^2}$ au voisinage du point de coordonnées $(0; 1)$.
2. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $P_1(X) = X^3 - 1$ par $P_2(X) = X^2 + 1$ à l'ordre $l = 3$.
   En déduire l'expression d'une primitive de $f : x \mapsto \frac{x^3-1}{x^4(x^2+1)}$.
3. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $P_1(X) = 2 - X - 3X^4 - X^5$ par $P_2(X) = 1 - X + X^3$ à l'ordre $l = 7$.
4. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $P_0(X) = 1$ par $P_1(X) = 1 + 2X + 3X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5$ à l'ordre $l = 4$ pour trouver U, V tels que

$$U \cdot P_1 + V \cdot P_2 = 1$$

pour $P_2(X) = X^5$.

IUT de Paris Descartes, Dpt INFO

Compléments d'Analyse : 3ème Feuille d'Exercices

A. Règle de Bernoulli-L'Hospital:

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^2 et $x_0 \in I$.

1. On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ mais $g'(x_0) \neq 0$. Vérifier que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

2. Retrouver

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\ln(1+x)}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

en utilisant ce résultat.

B. Calculs de D.L.:

Rechercher les D.L. de

1. $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ à l'ordre 4 en 0.
2. $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0.
3. $x \mapsto \sqrt{\tan x}$ à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$.
4. $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)$ à l'ordre 6 en 0.
5. $x \mapsto \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$ à l'ordre 3 en 0.
6. $x \mapsto (1 + \sin x + \cos x)^x$ à l'ordre 2 en 0.

C. Recherches de limites:

Dans chacune des situations suivantes, utiliser un D.L. (à un ordre approprié) afin de calculer

1. $\lim_{x \to 0} (1 - x + x^2)^{1/x}$
2. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2/x^2}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\mathrm{Sh}^2 x}$
4. $\lim_{x \to 0+} \frac{(\sin x)^{\sin x} - 1}{x^x - 1}$

D. Approximation de f'':
Pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, chercher

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}$$

en faisant une hypothèse convenable sur f.

E. D.L. de la solution d'une Equation Différentielle:

1. **Souvenirs de Probabilités et Statistiques:** rappelons que la *fonction d'erreur* $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ intervenant dans les calculs liés au Théorème de la Limite Centrale est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(a) Vérifier que Φ satisfait les conditions

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \Phi''(x) = -x\Phi'(x) \\ \Phi(0) = \frac{1}{2},\ \Phi'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$$

puis utiliser ces conditions pour donner le D.L. à l'ordre 5 de Φ en $x_0 = 0$.

(b) Retrouver ce D.L. en utilisant un D.L. à l'ordre 4 de $x \mapsto \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ en $x_0 = 0$.

2. **Une Eq. Diff. Linéaire:** on s'intéresse aux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ $y :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ solutions de l'*équation de Legendre*

$$(E)\ :\ (1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$$

(a) Trouver un D.L. à l'ordre 5 de la solution y_1 de (E) satisfaisant les conditions : $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$.

(b) Trouver un D.L. à l'ordre 5 de la solution y_2 de (E) satisfaisant les conditions : $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$.

(c) Parvenez-vous à reconnaître la fonction y_1 ? Et y_2 ?

IUT de Paris Descartes, Dpt INFO

Compléments d'Analyse : 4ème Feuille d'Exercices

A. EDO linéaires d'ordre 1:

Résoudre les équations suivantes:

$t^3 y'(t) - t^2 y(t) = 1$

$t y'(t) + y(t) = \cos(t)$

1. $3ty'(t) - 4y(t) = t$
2. $(1+t)y'(t) + y(t) = (1+t)\sin t$
3. $y'(t) + y(t) = \sin t + 3\sin 2t$
4. $y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = t^3$, où $t > 0$.
5. $y'(t) + 2y(t) = 3e^{5t} + t^3 - 1$

1) Résoudre équation homogène
2) Remplacer ce que on a trouvé dans l'équation homo
3) Conclusion : résultat de 2) multiplié par le facteur de x dans la solution homogène

B. EDO linéaires d'ordre 2 à coeff. constants:

Résoudre les équations suivantes (avec conditions initiales):

1. $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 3 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = te^t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 2(t-2)e^t \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2t + 25\sin 2t \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

1) Résoudre équation homogène (passer par les racines du polynôme cara.)
2) $\Delta > 0$ racines réelles λ_1, λ_2
$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$, une racine réelle λ
$y_1(t) = e^{\lambda t}$ $y_2(t) = t e^{\lambda t}$
$\Delta < 0$ deux racines complexes conjuguées
$\alpha \pm i\beta$
$y_1(t) = \cos(\beta t) \times e^{\alpha t}$
$y_2(t) = \sin(\beta t) \times e^{\alpha t}$
3) chercher $y_p(t)$ une sol particulière
$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$
4) trouver les constantes (système) grâce aux conditions initiales

C. EDO linéaires d'ordre > 2, à coeff. constants et homogènes:

Donner la solution générale de

1. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$
2. $y^{(4)} + y = 0$
3. $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 6y'' + 4y' + y = 0$

1) Résoudre équation homogène
2) Pour chaque racine λ :
λ simple : $C_0 e^{\lambda t}$
λ double : $C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$
λ multiple : $(C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{m-1} t^{m-1}) e^{\lambda t}$

~~AVEC~~ Faire un système
de connexion avec
un genre de forum pour
fair des propositions pou
améliorer le LS

D. Equations linéaires d'ordre n et systèmes linéaires d'ordre 1 :

En prenant soin de poser

$$y(t) = y_1(t),\ y'(t) = y_2(t),\ y''(t) = y_3(t),\ \dots,\ y^{(n-1)}(t) = y_n(t),$$

vérifier que toute EDO linéaire d'ordre n donnée par

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)y^{(n-2)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) + f(t),$$

équivaut à un système d'ordre 1 donné par

$$Y'(t) = A(t)\cdot Y(t) + B(t)$$

pour $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ et pour une matrice $A = A(t)$ et un vecteur $B = B(t)$ à identifier.

Que donne cette transformation dans le cas de l'EDO satisfaite par l'intensité dans un circuit RLC :

$$Ly''(t) + Ry'(t) + \frac{1}{C}y(t) = f(t)$$

E. Un système linéaire du 1er ordre dans $\mathbb{R}^3$:

On considère le système linéaire homogène à coefficients constants donné par

$$Y'(t) = A\cdot Y(t)$$

pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de la matrice A pour des valeurs propres α, β, γ à identifier.

2. En déduire que

$$Y_1 : t \mapsto e^{\alpha t}\cdot U, \quad Y_2 : t \mapsto e^{\beta t}\cdot V, \quad Y_3 : t \mapsto e^{\gamma t}\cdot W$$

fournissent trois solutions linéairement indépendantes de $Y' = A\cdot Y$.

3. Comment exprimer l'unique solution du système $Y' = A\cdot Y$ satisfaisant $Y(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pour trois valeurs prescrites $a, b, c \in \mathbb{R}$?

4. Que dire du comportement asymptotique de cette unique solution lorsque $t \longrightarrow +\infty$? (On pourra discuter suivant les valeurs de a, b, c).

IUT de Paris Descartes, Dpt INFO

Compléments d'Analyse : 5ème Feuille d'Exercices

A. Convergence ou divergence de séries numériques :
Etudier la nature des séries de terme général

1. $u_n = \left(\frac{3n+1}{5n+5}\right)^n$
2. $u_n = \frac{n^6}{2^n}$
3. $u_n = \frac{n^2}{n^n}$
4. $u_n = \frac{n^{2015}}{n!}$
5. $u_n = \sqrt{\frac{n^{2015}+1}{n^{2014}+2015}}$
6. $u_n = (-1)^n$
7. $u_n = \sin(\frac{1}{n})$
8. $u_n = (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$
9. $u_n = \begin{cases} \sin(\frac{1}{n}) & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{-1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$
10. $u_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}$
11. $u_n = \frac{1}{n^{\cos\frac{1}{n}}}$
12. $u_n = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n}$

B. Sommation de certaines séries numériques :
Etablir la convergence de chacune des séries numériques ci-dessous puis calculer sa valeur :

1. $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^2-1}$
2. $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$
3. $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$
4. $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)...(k+p)}$
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3+8n^2+17n+10}$
6. $\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$
8. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$
9. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{1}{2^n}\right)$
(on pourra voir que :
$\tan x = \text{cotan} x - 2\text{cotan} 2x$).

C. Une comparaison instructive :
Soient $(v_k)_{k\geq 1}$ et $(w_k)_{k\geq 1}$ les suites définies par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad v_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \text{ et } w_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}$$

1. Etablir la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} v_k$.
2. Vérifier que la série $\sum_{k\geq 1} w_k$ diverge, mais que l'on a néanmoins :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{w_k}{v_k} = 1$$

Qu'en concluez-vous ?? (Plusieurs conclusions pourront être tirées).

D. Séries réelles et intégrales :

1. – Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} dx$$

   – En déduire que la *série harmonique alternée* a pour valeur $\ln(2)$, au sens où

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \ldots = \ln(2)$$

   (la convergence de cette série célèbre avait déjà été établie en cours par le *critère des séries alternées*).

2. Utiliser le même type de procédé que dans la question précédente afin d'établir la validité de la *formule de Leibniz* :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

   (on s'appuyera sur le fait que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x^2} = \mathrm{Arctan}'(x)$).

3. Comment utiliser le caractère alterné de ces deux séries afin d'obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près de $\ln 2$, ou encore une v. a. à 10^{-3} près de π ??

E. Comparaison d'une série et d'une intégrale :

Pour $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ décroissante, posons

$$u_n = f(n) \text{ puis } v_n = u_n - \int_n^{n+1} f(t)dt \ .$$

Montrer que la série ayant pour terme général v_n est convergente (on n'hésitera pas à s'appuyer sur une *interprétation graphique* du phénomène !).

Application célèbre : valeurs approchées de la *constante d'Euler*

Etablir l'existence de

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \ln n \right\}$$

et donner un encadrement de γ (on pourra prouver e.g. que $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$).

Dem 1 Analyse 1

A]

1)

$z_1 = \frac{1}{1+i} - \frac{2i}{1-i}$

$= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} - \frac{2i(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} - \frac{2i(1+i)}{2}$

$= \frac{1}{2}\left[(1+2) + i(-1-2)\right] = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

$\rho = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\hookrightarrow z_i = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow z_i = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = \frac{1-i}{3i+(1-i)^2} = \frac{1-i}{3i+\cancel{1}-2i-\cancel{1}}$

$= \frac{1-i}{i}$

$= \frac{-i(1-i)}{1}$

$= -i - 1$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{2}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$z_3 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

2)

$$z_3 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{99} = i^{99} = \frac{i^{100}}{i} = \frac{i^{2\times 50}}{i}$$

$$= \frac{-1^{50}}{i} = \frac{1}{i} = -i$$

$=$

B) 1) On détermine la forme polaire :

$$z_1 = \sqrt{3} - i = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)$$

$$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

On cherche les éléments

$$z_1' \text{ tq } (z_1')^2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$z_1'' \text{ tq } (z_1')^3 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Sem1 Analyse TD 2

$|z_1'| = \sqrt{2}$

$\arg(z) = \frac{\theta}{2} + k\pi$

$k=0 : \frac{\theta}{2}$

$k=1 : \frac{\theta}{2} + \pi$

$\sqrt{z_1} = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{12}}$ ou $\sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$

$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{18}}$

ou $\sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{11}{18}}$

ou $\sqrt[3]{2}\, e^{-i\frac{13\pi}{18}}$

2)

$(E_1) : z^7 + 4 = 0$

$z^7 = -4 \iff -4 = 4e^{i\pi}$

$z = \sqrt[7]{4e^{i\pi}}$

$z = \sqrt[7]{4}\, e^{i\frac{\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7}},\ k \in \{\overset{-\frac{5\pi}{7}}{\overset{\uparrow}{-3}}, \underset{-\frac{3\pi}{7}}{\underset{\downarrow}{-2}}, \overset{-\frac{\pi}{7}}{\overset{\uparrow}{-1}}, \underset{\frac{\pi}{7}}{\underset{\downarrow}{0}}, \overset{\frac{3\pi}{7}}{\overset{\uparrow}{1}}, \underset{\frac{5\pi}{7}}{\underset{\downarrow}{2}}, \overset{\pi}{\overset{\uparrow}{3}}\}$

Scanned by CamScanner

c)

1) $z^2+\sqrt{2}\,z+1=0$

$\Delta = b^2-4ac$
$= (\sqrt{2})^2 - 4\times 1\times 1$
$= 2-4$
$= -2$ $\qquad \delta = \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$

$z_1 = \frac{-b\pm\sqrt{\delta}}{2}$

$\rightarrow \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\rightarrow \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

$\rightarrow z^2+\sqrt{2}z+1 \quad (z-e^{i\frac{3\pi}{4}})(z-e^{-i\frac{3\pi}{4}})$

2) $z^2+2iz-4-4i=0$

$\Delta = (2i)^2 - 4\times 1\times(-4-4i)$
$= -4+16+16i$
$= 12+16i$

$|\Delta| = \sqrt{(12)^2+(16)^2} = \sqrt{144+256} = \sqrt{400}$

$|\Delta| = 20$

$\Delta = 20\times\left(\frac{12}{20}+\frac{16}{20}i\right)$

Scanned by CamScanner

Sem 1 Analyse TD 3

$\Delta = 20\left(\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right)$

Soit θ_0 tq $\cos\theta_0 = \frac{3}{5}$ $\sin\theta_0 = \frac{4}{5}$

$\Delta = 20e^{i\theta_0}$

Soit δ tq $\delta^2 = \Delta$

$\delta = \sqrt{20}\, e^{i\frac{\theta_0}{2}}$

$z = \dfrac{-2i \pm \sqrt{20}e^{i\frac{\theta_0}{2}}}{2} = -i \pm \sqrt{5}e^{i\frac{\theta_0}{2}}$

$= -i \pm \sqrt{5}\left(\cos\frac{\theta_0}{2} + i\sin\frac{\theta_0}{2}\right)$

$\pm\left(\sqrt{5}\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) + i\left(-1 \pm \sqrt{5}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$

3) $z^2 - (4+2i)z + i - 1 = 0$

$\Delta = (-4-2i)^2 + 4\times 1 \times (i-1)$

$= 16 + 16i - 4 + 4(i-1)$

$= 12 + 16i + 4i + 4$

$= 16 + 12i$

$|\Delta| = 20$

Soit θ_0 tq $\cos\theta_0 = \frac{4}{5}$ $\sin\theta_0 = \frac{3}{5}$

$\Delta = 20e^{i\theta_0}$ soit δ tq $\delta^2 = \Delta$

$$Z = \frac{-(4+2i) \pm \sqrt{\rho_0 e^{i\theta_0}}}{2}$$

$$= 2+i \pm \sqrt{5}\, e^{\frac{i\theta_0}{2}}$$

$$\cancel{= 2+i \pm \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + i\sin\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

$$\cancel{= 2+i \pm \sqrt{5}\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \pm i\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

$$\cancel{= 2 + \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \pm i\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) + i}$$

$$= 2 \pm \sqrt{5}\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + i\left(\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sqrt{5} \pm 1\right)$$

D) $E = \{a^2+b^2 \quad a, b \in \mathbb{N}\}$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a^2+b^2 \in E \\ \beta &= c^2+d^2 \in E \end{aligned}\right\} \overset{?}{\alpha \times \beta \in E}$$

$\exists\ \alpha \cdot \beta = e^2 + f^2$

$\alpha = a^2 - (-b^2) = a^2 - i^2b^2 = (a-ib)(a+ib)$

$\beta = (c-id)(c+id)$

QF

$\alpha\beta = (a-ib)(a+ib)(c-id)(c+id)$

$= \underbrace{(a+ib)(c+id)}_{Z}\ \underbrace{(c-id)(a-ib)}_{\bar{Z}}$

$= |Z|^2 \quad Z = u + iV = (ac-bd) + i(bc+ad)$

$= u^2 + v^2$

$\exists R: (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2$

Scanned by CamScanner

Multiplicité : Nb de fois où la racine intervient dans la décomposition

A) nombre de fois +1 que la racine est toujours une racine après dérivation successive

1)

$P_1(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$

Racines : $\{-1 ; 1\}$
Multiplicité : 1

$P_2(X) = X^4 - 1 = (X^2-1)(X^2+1)$

$= (X-1)(X+1)(X^2+1)$

Racines : $\{-1 ; 1\}$

Multiplicité : 1

$P_3(X) = X^3 - X = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1)$

mul 1

$r = \{-1 ; 0 ; 1\}$ ~~mul 2~~ mult 1

$P_4(X) = X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$

$r = \{-1, 0, 1\}$ mul : 2

mul 1

$P_5(X) = X^4 - 2X^2 + 1 = (X^2-1)^2 = (X-1)^2(X+1)^2$

$r : \{-1, 1\}$ mul $= 2$

$\mathbb{R}[X] / \mathbb{C}[X]$

$P_1(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$

$r = \{-1, 1\}$ mul 1

$\mathbb{C}[X]$

$P_2(X) = X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$

$r = \{-1, 1, -i, i\}$ mul $= 1$

$P_3(X) =$ idem $\mathbb{R}[X]$

$P_4(X) =$ idem $\mathbb{R}[X]$

$P_5(X) =$ idem $\mathbb{R}[X]$

B)

1) $P_1(X) / P_2(X)$

$$\begin{array}{l|l} X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1 & X^3 + X^2 - X - 1 \\ \hline -(X^4 + X^3 - X^2 - X) & X \\ R_1(X) = -2X^2 - 3X - 1 & \end{array}$$

$P_2(X) / R_1(X)$

$$\begin{array}{l|l} X^3 + X^2 - X - 1 & -2X^2 - 3X - 1 \\ \hline -(X^3 + \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X) & -\frac{1}{2}X + \frac{1}{4} \\ = -\frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X - 1 & \\ -(-\frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{4}X - \frac{1}{4}) & \end{array}$$

Sem 2 Analyse TD 2

$R_2(X) = \frac{3}{4}X - \frac{3}{4}$ $\to X+1$

(c'est plus simple et pour le PGCD on peut multiplier par une constante ça change pas)

$R_1(X) / R_2(X)$

$$\begin{array}{l|l} 2X^2+3X+1 & \boxed{X+1} \text{ PGCD} \\ \hline X+1 & 2X+1 \\ 0 & \end{array}$$

$PGCD(P_1, P_2) = X+1$

2) $P_1(X) / P_2(X)$

$$\begin{array}{l|l} X^4-10X^2+1 & X^4-4X^3+6X^2-4X+1 \\ \hline -(X^4-4X^3+6X^2-4X+1) & 1 \\ R_1(X) = -4X^3-16X^2+4X & \end{array}$$

$\to X^3-4X^2+X$

$P_2(X) / R_1(X)$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{X^4}-4X^3+6X^2-4X+1 & X^3-4X^2+X \\ \hline -(\cancel{X^4}-4X^3+X^2 & X \\ R_2(X) = 5X^2-4X+1 & \end{array}$$

$R_1(X) / R_2(X)$

$$
\begin{array}{l|l}
X^3 - 4X^2 + X & 5X^2 - 4X + 1 \\
\hline
-\left(\cancel{X^3} - \frac{4}{5}X^2 + \frac{1}{5}X\right) & \frac{1}{5}X - \frac{16}{25} \\
= -\frac{16}{5}X^2 + \frac{4}{5}X & \\
-\left(-\frac{16}{5}X^2 + \frac{64}{25}X - \frac{16}{25}\right) & \\
= -\frac{44}{25}X - \frac{16}{25} & \times(25) \rightarrow 44X + 16 \\
 & \quad \downarrow :4 \\
 & \quad 11X + 4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
5X^2 - 4X + 1 & 11X + 4 \\
\hline
-\left(5X^2 - \frac{20}{11}X\right) & \frac{5}{11}X - \frac{24}{121} \\
= -\frac{24}{11}X + 1 & \\
-\left(-\frac{24}{11}X + \frac{96}{121}\right) & \\
= \frac{25}{121} & \times \frac{121}{25} \rightarrow 1 \rightarrow \text{PGCD}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
11X - 4 & 1 \\
\hline
0 & 11X - 4
\end{array}
$$

→ Les deux polynômes sont 1er entre eux

Sem 2

Analyse

TD 3

On cherche ses racines qui sont 1 et 2

le reste est de d° 1 car $P_2(X)$ est d° 2

1) $X^{50} = (X^2-3X+2)\,Q(X) + (aX+b)$

$= (X-1)(X-2)\,Q(X) + (aX+b)$

en $X=1$,

$1^{50} = (1-1)(1-2)\,Q(X) + (a1+b)$

$\begin{cases} 1^{50} = a + b \\ 2^{50} = 2a + b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} a = 2^{50} - 1 \\ b = 2(1-2^{49}) \end{array}$

2) $(X+\sqrt{3})^{17} = (X+1)\,Q(X) + cX + d$

$(i+\sqrt{3})^{17} = ci + d$

$(-i+\sqrt{3})^{17} = -ci + d$

$i+\sqrt{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$-i+\sqrt{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$\begin{cases} 2^{17}e^{i\frac{17\pi}{6}} = 2^{17}e^{i\frac{5\pi}{6}} = ci + d \\ 2^{17}e^{-i\frac{17\pi}{6}} = 2^{17}e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -ci + d \end{cases}$

On additionne tout pour trouver 2d et donc d

$\Leftrightarrow \cancel{2}d = 2^{17}\left(\frac{e^{i\frac{5\pi}{6}} + e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2}\right)$

$$= 2^{17} \cos \frac{5\pi}{6}$$

$$c - id = 2^{17} (-i) e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$c + id = 2^{17} i e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

$$c = 2^{17} i \left(\frac{e^{i\frac{5\pi}{6}} - i e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{2} \right)$$

$$= 2^{17} \sin \frac{5\pi}{6}$$

Sem 3 Analyse TD 1

B|

1) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ à l'ordre 4 en 0

On a $val(P_n(g)) \leq val(P_n(f))$

$1 \leq 1$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} \, o(x^4)$

↳ On fait à l'ordre 4+1

$$\frac{x}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}$$

$$\begin{array}{r|l}
x & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\
-\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) & 1 + \frac{x^2}{3!} + \alpha x^4 \\
\hline
\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} & \\
-\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{(3!)^2} + \frac{x^7}{3!5!}\right) & \\
\hline
\alpha x^5 - \frac{x^7}{3!5!} & \\
-\left(\alpha x^5 - \frac{\alpha}{3!} x^7 + \frac{\alpha}{5!} x^9\right) & \\
\hline
\frac{\alpha}{3!} x^7 - \frac{\alpha}{5!} x^9 &
\end{array}$$

ça nous suffit car on veut l'ordre 4 pour la div

A) Règle de l'Hospital

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 et $x_0 \in I$

(feuille)

$$f(x) = \cancel{f(x_0)} + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$g(x) = \cancel{g(x_0)} + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}$$

On divise par $(x - x_0)$

$$= \frac{f'(x_0) + o(1)}{g'(x_0) + o(1)} \xrightarrow{\text{On passe à la limite}} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$f(x) = o(x^2) \Leftrightarrow \lim \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

$$f(x) = o(1) \Leftrightarrow \lim \frac{f(x)}{1} = 0$$

Sem 3 Analyse TD 2

2)

⊗

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$$

On a : $\cos 0 - e^0 = 1 - 1 = 0$
$(0+1) e^0 - 1 = 1 \times 1 - 1 = 0$

On a donc la condition remplit pour la règle de l'hopital

donc $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1} = \frac{(\cos x - e^x)'}{((x+1)e^x - 1)'}$

$= \frac{-\sin x - e^x}{e^x + (x+1)e^x}$ On se place en 0 :

$= \frac{-\sin 0 - e^0}{e^0 + (0+1) e^0} = \frac{-1}{1+1\times 1}$

$= -\frac{1}{2}$

B)

2)

On fait d'abord $\sin x$ à l'ordre 5 pour avoir $\frac{\sin x}{x}$ à l'ordre 4

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)$$

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + o(X^4)$$

$$\ln\Big(1 + \overbrace{\Big[-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\Big]}^{X} + o(x^4)\Big)$$

$$= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{(3!)^2} x^4 + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{6} + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2(3!)^2}\right) x^4 + o(x^4)$$

5) $\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$

Sem 3 Analyse TD 3

$\frac{\ln(1+x)}{x}$ revient à $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 :

$$\ln(1+a) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

$$\ln(1+\underbrace{\left[-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right]}_{X}) + o(x^3)$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{2}\overbrace{\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2}^{X} + o(x^3)$$

On prend que ceux qui dépassent pas ordre 4

$$= -\frac{3}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{6}x^3\right)$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3 x^3\right) + o(x^3)$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{5}{24}a^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$$

6) $(1+\sin x+\cos x)^x$: l'ordre 1 :

$\cos x = 1 + o(x)$

$\sin x = x + o(x)$

$(1+\cos x+\sin x) = e^{\underbrace{x\ln(1+\cos x+\sin x)}_{\text{ordre } 1 \; = \; \text{ordre } 2}}$

On va que à l'ordre 1

$1+\cos x+\sin x = 2+x+o(x)$

$\ln(1+\cos x+\sin x) = \ln(2+x+o(x))$

$= \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)+o(2)\right)$

$= \ln(2)x + \ln\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right)$

$= \ln(2)x + \frac{x}{2}+o(x)$

$x\ln(1+\sin x+\cos x) = \ln(2)x + \frac{x^2}{2} + o(x$

$e^{\ln(2)x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 1+X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)$

$= 1+\left(\ln(2)x+\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln(2)x+\frac{x^2}{2}\right)^2+o(X^2)$

$= 1+\left(\ln(2)x+\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln(4)x^2\right)+o(x^2)$

$= 1+\ln(2)x+\frac{x^2}{2}+\frac{\ln(4)x^2}{2}+o(x^2)$

E)

(ordre 3)

1) a)

$$\begin{array}{l|l} \cancel{1} - \cancel{X} - X^3 - X^6 & 1 - X - X^2 \\ \hline -(\cancel{1} - \cancel{X} - X^2) & 1 + X^2 \\ = \cancel{X^2} - \cancel{X^3} - X^6 & \\ -(\cancel{X^2} - \cancel{X^3} - X^4) & \\ = X^4 - X^6 & \end{array}$$

On s'arrête si le a ordre dit ordre mais

On est à l'ordre $3+1=4$

$$\hookrightarrow 1 - X - X^3 - X^6 = \underbrace{(1+X^2)}_{P_3}(1-X-X^2) + \underbrace{(X^4 - X^6)}_{X^4\underbrace{(1-X^2)}_{P_4}}$$

b) Allure de la courbe en $x=0$

DL à l'ordre 3.

$$f(x) = \frac{1 - x - x^3 - x^6}{(1+x^2)}$$

$$= 1 - x - x^2 + x^4 \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

On est à l'ordre 3 donc est négligeable.

on fait le DL

$$= 1 - x - x^2 + o(x^3)$$

2) a)

$$\begin{array}{l|l} -1+X^3 & 1+X^2 \quad \text{(ordre 3)} \\ \hline -(-1-X^2) & -1+X^2+X^3 \\ = X^2+X^3 & \\ -(X^2+X^4) & \\ = X^3-X^4 & \end{array}$$

$\hookrightarrow X^3-1 = (X^3+X^2-1)(X^2+1)+X^4(-X-1)$

b) Primitive de $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^4(x^2+1)}$

$$f(x) = \frac{(x^3+x^2-1)(x^2+1)+x^4(-x-1)}{x^4(x^2+1)}$$

$$= \frac{x^3+x^2-1}{x^4} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$F(x) = \ln(x) - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \text{Arctan}(x)$$

Sem 4 Analyse TD 2

Feuille 1

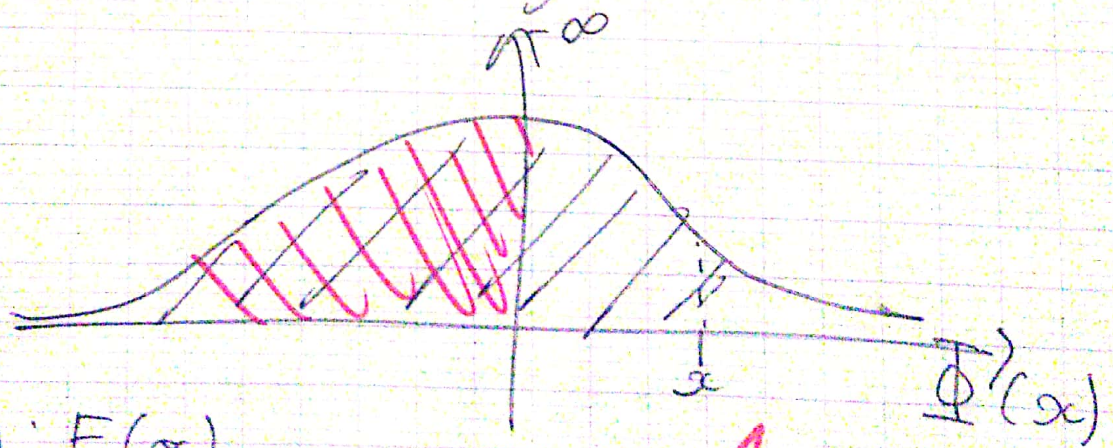
1) $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\Phi''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x \quad e^{-\frac{x^2}{2}} \right]$$

$$= -x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= -x \, \Phi'(x)$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



: $F(x)$

$F(+\infty = 1)$

donc $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

: $\frac{1}{2}$

$\Phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)$

$\Phi''(x) = -x\,\Phi'(x)$ (1)

$\Phi(0) = \frac{1}{2}$ (2)

$\Phi'(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (3)

$x.\Phi'(x) = (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + o(x^4)) \times x$ (ordre 4)

$= -a_1 x - 2a_2 x^2 - 3a_3 x^3 + o(x^3)$ (1)

$\Phi''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + 20 a_5 x^3 + o(x^3)$ (ordre 3)

(1) $\Rightarrow$ $2a_2 = 0$, $6a_3 = -a_1$, $12 a_4 = -2a_2$, $20 a_5 = -3a_3$ $\Rightarrow$ $a_2 = 0$, $a_4 = 0$

$\Phi(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2}$

$\Phi'(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$\Leftrightarrow 6a_3 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ | $20 a_5 = -3\left(-\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\right)$

$\Leftrightarrow a_3 = -\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}$ | $20 a_5 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$

$a_5 = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}}$

Sem 4 Analyse TD 3

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x + 0x^2 + \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}x^3$$
$$+ 0x^4 + \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} + o(x^5)$$

b)

$$-\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}x^2$$

or $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \frac{X^4}{4} + o(x^4)$

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \left(\frac{-x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)\right)$$

ça est la dérivée de ça

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \left(\frac{-x^2}{2}\right) + \frac{x^4}{8}\right) + o(x^4)$$

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}x^2 + \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}x^4 + o(x^4)$$

on intègre car

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x - \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}x^3 + \frac{1}{40\sqrt{2\pi}}x^5 + o(x^5)$$

défini à 1 constante près, $+ C$ avec $C = \frac{1}{2}$

définie par la valeur en 0

On retrouve bien la même chose

Sem 5

Analyse

TD 1

$t^3 y'(t) - t^2 y(t) = 1$

EDO linéaire d'ordre 1 à coeff non constants inhomogène

1) Solution du pb homogène (E_H)

2) Solution particulière (méthode de variation de la constante

1) (E_H) : $t^3 y'(t) - t^2 y(t) = 0$

$t^3 y'(t) = t^2 y(t)$

$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \ln(|y(t)|)' = \ln(t)'$

$\Leftrightarrow \ln(|y(t)|) = \ln(t + c)$

$\Leftrightarrow y(t) = e^{\ln(t)+c}$

$\Leftrightarrow y(t) = e^{\ln(t)} e^c \rightarrow y(t) = \lambda(t)$

2) Méthode de variation de la constante

$y(t) = \lambda(t)\, t$

Si y vérifie (E), peut on identifier λ ?

$t^3 \underbrace{(\lambda'(t) \times t + \lambda(t) \times 1)}_{y'(t)} - t^2 \underbrace{(\lambda(t) t)}_{y(t)} =$

$t^4 \lambda'(t) + \cancel{t^3 \lambda(t)} - \cancel{t^3 \lambda(t)} = 1$

$$\lambda'(t) = \frac{1}{t^4}$$

$$\lambda(t) = -\frac{1}{3t^3} + \lambda_0 \quad \text{avec } \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

(constante d'intégration)

Conclusion :

Les solution s'écriveent :

$$y(t) = \left(\lambda_0 - \frac{1}{3t^3}\right) \times t$$

$$= \underbrace{\lambda_0 t}_{\text{Solution générale de } (E_H)} \underbrace{- \frac{1}{3t^2}}_{\text{Solution particulière}}, \ \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

1) $t y'(t) + y(t) = \cos(t)$

EDO linéaire non Homogène à coeffs non constants

(E_H) : $t y'(t) + y(t) = 0$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{-1}{t}$$

$$\ln |y(t)| = -\ln t + c$$

Sem 5 | Analyse | TD 2

$$y(t) = e^{-\ln(t)} \times e^{c}$$

$$y(t) = \frac{\lambda}{t}, \ \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \text{solution générale}$$

2) Méthode de variation de la constante

$$y(t) = \frac{\lambda(t)}{t}$$

On injecte dans l'équation en homogène :

$$t\left(\frac{\lambda(t)}{t}\right)' + \frac{\lambda(t)}{t} = \cos(t)$$

$$\Leftrightarrow t\left(\frac{\lambda'(t)}{t} - \frac{\lambda(t)}{t^2}\right) + \frac{\lambda(t)}{t} = \cos(t)$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(t) - \cancel{\frac{\lambda(t)}{t}} + \cancel{\frac{\lambda(t)}{t}} = \cos(t)$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(t) = \cos(t)$$

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \sin(t)$$

$$y(t) = (\lambda_0 + \sin(t)) \times \frac{1}{t}$$

$$= \frac{\lambda_0}{t} + \frac{\sin(t)}{t}, \ \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

Feuille 4

A]

1) $3t\,y'(t) - 4y(t) = t$

$(E_H) : 3t\,y'(t) - 4y(t) = 0$

$$3t\,y'(t) = 4y(t)$$

$$\frac{3t\,y'(t)}{y(t)} = 4$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{t}$$

$$\ln(|y(t)|) = \frac{4}{3}\ln(t) + c$$

$$e^{\ln(|y(t)|)} = e^{\frac{4}{3}\ln(t)}\, e^{c}$$

$$y(t) = t^{\frac{4}{3}} \times \lambda$$

$$y(t) = t^{\frac{3}{2}} \times \lambda(t)$$

On remplace :

$$3t\left[t^{\frac{4}{3}} \cdot \lambda(t)\right]' - 4\left(t^{\frac{4}{3}}\lambda(t)\right) = t$$

$$3t\left[\frac{4}{3}t^{\frac{1}{3}}\lambda(t) + t^{\frac{4}{3}}\lambda(t)'\right] - 4\left(t^{\frac{4}{3}}\lambda(t)\right) = t$$

Ex 5 Analyse

$$\cancel{4t^{\frac{4}{3}}\lambda(t)} + t^{\frac{7}{3}}\cdot\lambda(t)'$$

$$\cancel{-4(t^{\frac{4}{3}}\lambda(t))} = t$$

$$\Leftrightarrow 3t^{\frac{7}{3}}\lambda(t)' = t$$

$$\lambda(t)' = \frac{t}{3t^{\frac{7}{3}}}$$

$$\lambda(t)' = \frac{t^{-\frac{4}{3}}}{3}$$

$$\lambda(t)' = \frac{1}{3}t^{-\frac{4}{3}}$$

$$\lambda(t) = \lambda^0 - t^{-\frac{1}{3}}$$

<u>Conclusion:</u>

$$y(t) = t^{\frac{4}{3}} \times \left[\lambda_0 - \frac{1}{t^{1/3}}\right]$$

$$= t^{\frac{4}{3}}\lambda_0 - \frac{t^{\frac{4}{3}}}{t^{1/3}}$$

$$\boxed{= t^{\frac{4}{3}}\lambda_0 - t}$$

Scanned by CamScanner

B) Équation d'ordre 2

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t)$$

1) Trouver les solution du pb homogène :

(E_H) : $a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = 0$

$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

2) Trouver une solution particulière du pb initial.

conclusion :

$$y(t) = y_p(t) + C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

1) $a y'' + b y' + c y = 0$
le polynome caractéristique associé à (E_H) s'écrit :

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- $\Delta > 0$, racine de P réelles, λ_1 et λ_2
  $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ $\quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

- $\Delta = 0$, P admet une unique double réel $\lambda \in \mathbb{R}$
  $y_1(t) = e^{\lambda t}$, $y_2(t) = t e^{\lambda t}$

Sem 5 Analyse TD 4

• $\Delta < 0$ P admet deux racines complexes conjuguées

$\alpha \pm i\beta = X$

$y_1(t) = \cos(\beta t) \times e^{\alpha t}$

$y_2(t) = \sin(\beta t) \times e^{\alpha t}$

B) Problème Homogène

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$

Polynome caractéristique :

$P = X^2 - 5X + 6$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$
$= 25 - 24$
$= 1$

$\lambda_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1}$ et $\lambda_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1}$

$= \frac{4}{2}$ $= \frac{6}{2}$

$= 2$ $= 3$

$y_1(t) = c_1 e^{2t}$ $y_2(t) = c_2 e^{3t}$

$y(t) = y_p(t) + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$

Solution particulière :

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 3$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$

$y_p = \frac{1}{2}$ est une solution particulière (évidente) de problème inhomogène.

Conclusion :

Les solutions du pb s'écrivent :

$$y(t) = \frac{1}{2} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

On cherche c_1 et c_2

$$y(0) = \frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 1$$
$$y'(0) = 2c_1 + 3c_2 = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \\ 2c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} - c_2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2} - c_2\right) + 3c_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2c_2 + 3c_2 = 0$$

$$1 + c_2 = 0$$

$$c_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow c_1 - 1 = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}$$

Scanned by CamScanner

Sem 3 Analyse TD 2

$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{2t} - e^{3t}$

e) $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = te^{t}$

$y(0) - y'(0) = 0$

On traite l'équation inhomogène

$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t)$

Le polynome de référence :

$X^2 - 2X + 2$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2$

$= 4 - 6$

$= -4 = 4e^{i\pi}$

$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4} e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}$

$= 1 \pm \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$

$= 1 \pm 0 + i$

$= 1 \pm i$

$1 \pm i1 = \lambda$

$y_1(t) = \cos(1t) \times e^{1t}$

$y_2(t) = \sin(1t) \times e^{1t}$

$$y(t) = y_p(t) + c_1 \cos(t)e^t + c_2 \sin(t)e^t$$

Solution Particulière :

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = te^t \\ y'(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

On cherche une constante :

$\rightarrow 2y(t) = te^t \rightarrow$ ça marche pas

On cherche $y_p(t) = Cte^t$

$$y'_p(t) = c(e^t + te^t) = c(1+t)e^t$$

$$y''_p(t) = c(e^t + (1+t)e^t) = c(2+t)e^t$$

$$y_p'' - 2y_p' + 2y_p = Ce^t([2+t] - 2[1+t] + 2t)$$

$$= Ce^t t$$

$$\Leftrightarrow te^t = Ce^t t$$

$C = 1$ donc $y_p(t) = e^t t$

Conclusion :

Les Solutions du pb s'écrivent

$$y(t) = te^t + c_1 \cos(t)e^t + \sin(t)e^t$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

$$y(0) = c_1 = 0$$

$$y'(0) = e^t + te^t + c_1[-\sin(t)e^t + \cos(t)e^t] + c_2[\cos(t)e^t + \sin(t)e^t]$$

$$= 1 + c_1 + c_2$$

$$\Leftrightarrow 1 + c_1 + c_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 0 + c_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow c_2 = -1$$

Conclusion :

L'unique solution du problème :

$$\boxed{y(t) = te^t - \sin(t)e^t}$$

Sem 6 Analyse TD 1

A)

1)

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{\left(\frac{\ldots +1}{5n+5} \right)^n} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3n+1}{5n+5} \right) = \frac{3}{5}$$

Or d'après Cauchy,

si $\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{U_n} \right) < 1$

U_n converge

donc $\left(\frac{3n+1}{5n+5} \right)^n$ converge

2) $\frac{n^6}{2^n}$

$$\frac{(n+1)^6}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^6} = \frac{(n+1)^6 \, 2^n}{2^{n+1} \, n^6}$$

$$= \frac{(n+1)^6}{n^6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^6$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n+1}{n} \right)^6 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

3) $u_n = \dfrac{n^2}{n^n}$ On compare avec 2):

$n^2 \leqslant n^6 \quad \forall n \geqslant 1$

$n^n \geqslant 2^n \quad \forall n \geqslant 2$

$\dfrac{1}{n^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow \forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant \dfrac{n^2}{n^n} \leqslant \dfrac{n^6}{2^n}$

$\sum u_n \leqslant b_n$

lorsqu'a converge

AUTRE METHODE

$\dfrac{n^2}{n^n} = \dfrac{1}{n^n \cdot n^{-2}} = \dfrac{1}{n^{n-2}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$

$\uparrow$

$n \geqslant 4$

4) $\dfrac{n^{2019}}{n!}$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{2019}\, n!}{(n+1)!\, n^{2019}}$

$= \dfrac{(n+1)^{2019}}{n^{2019}} \times \dfrac{n!}{(n+1)!}$

$= \dfrac{(n+1)^{2019}}{n^{2019}\,(n+1)}$

Scanned by CamScanner

Sem 6 Analyse TD 2

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2019} \frac{1}{(n+1)}$$

$$= \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^{2019} \frac{1}{(n+1)}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2019} \frac{1}{(n+1)} \xrightarrow{\text{On passe à la limite}} 1 \times 0$$

$= 0$ donc ça converge d'après d'Alembert.

5) $\sqrt{\dfrac{n^{2015}+1}{n^{2014}+2015}}$

$\sum U_n$ converge $\Rightarrow U_n \to 0$
(la réciproque est pas vraiment)
Contraposée : $U_n \not\to 0$ alors $\sum U_n$ dvg
On veut montrer que U_n ~~cv~~ $\not\to 0$
(condition suffisante mais pas nécessaire)

$$\left(\frac{n^{2015}+1}{n^{2014}+2015}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{n^{2015}\left(1+\frac{1}{n^{2015}}\right)}{n^{2014}\left(1+\frac{2015}{n^{2014}}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{n}\left(\frac{1+\frac{1}{n^{2015}}}{1+\frac{2015}{n^{2014}}}\right)$$

On passe à la limite :

$\sqrt{n} \geq 1$

donc $u_n \sim \sqrt{n}$

donc $\sum U_n$ est divergente car U_n est grossièrement divergent.

6) $(-1)^n$

La série diverge car u_n diverge

7) $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ (DL)

or $\sum \frac{1}{n}$ dvg (série harmonique)

donc $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ dvg

$\left(\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ cvg ssi } \alpha > 1\right)$

8) C'est une série alternée

$\sum u_n = \sum (-1)^n x_n$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_n \geq 0 \\ \bullet\ x_n \searrow \\ \bullet\ \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0 \end{array}\right\} \sum (-1)^n x_n$ cvg

$\sum u_n$ cvg or $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ dvg donc

$\sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ cvg mais pas abs cvg

Sem 6 Analyse TD 3

9) $U_n = \begin{cases} \sin \frac{1}{n} & n \text{ pair} \\ -\frac{1}{2^n} & n \text{ impair} \end{cases}$

Série alternée

$U_n^+ = \begin{cases} \sin(\frac{1}{n}) & n \text{ impair} \\ 0 & n \text{ pair} \end{cases}$

$U_n^- = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & n \text{ pair} \\ 0 & n \text{ impair.} \end{cases}$

$U_n = U_n^+ - U_n^-$

$\sum U_n = \sum U_n^+ - \sum U_n^-$

or $\sum U_n^+$ dvg (on l'a montré)

et $\sum U_n^-$ cvg

donc $\sum U_n$ dvg

Sem 7 Analyse TD 1

B) 2)

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2+k}$$

$$\frac{1}{k^2+k} \sim \frac{1}{k^2}$$ (série de Riemann avec $\alpha = 2$)

donc $\left(\sum \frac{1}{k(k+1)}\right)$ converge

On calcule la série :

décomposition élément simple

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A(k+1) + Bk}{k(k+1)}$$

$$0k + 1 = \underbrace{(A+B)}_{0} k + \underbrace{A}_{1} = P(k)$$

$A = 1$, $B = -1$

$$\sum_{k=1}^{k} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}}$$
$$+ \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}$$
$$+ \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}$$
$$+ \cancel{} \ldots$$
$$+ \cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$S = \lim_{N \to +\infty} S_N = 1$$

3)

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{1}{(k^2+k)(k+3)} = \frac{1}{k^3 + 3k^2 + k^2 + 3k}$$
$$= \frac{1}{k^3 + 4k^2 + 3k}$$

or $\frac{1}{k^3+4k^2+3k} \sim \frac{1}{k^3}$ (Série de Riemann avec $\alpha = 3$)

Donc d'après le critère de Riemann, $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k(k+1)(k+3)} \right)$ converge

Sem 7

Analyse

TD 2

On calcule la valeur de la série

$$\frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+3}$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{A(k+1)(k+3) + B\,k(k+3) + C\,k(k+1)}{k(k+1)(k+3)}$$

$\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{6}$

$$1 = A(k+1)(k+3)$$

. On isole A, B et C en multipliant par leur dénominateur

. ensuite on va en un ~~de~~ fixé

. On résoud facilement

.

.

Télescopage :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{1/3}{k} + \frac{-1/2}{k+1} + \frac{1/6}{k+3}$$

$$S_N = \frac{1}{3}\times\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{1}{4}$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\frac{1}{5}$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\frac{1}{6}$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\frac{1}{7}$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{1}{N-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{N} + \frac{1}{6}\frac{1}{N+2}$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{1}{N} - \frac{1}{2}\frac{1}{N+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{N+3}$$

$$S_N = \frac{1}{3}\times\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$$
$$+ \frac{1}{6}\,\frac{1}{N+1} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{N+2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{N+1} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{N+3}$$

$$\longrightarrow S = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{7}{36}$$

A]

10) $U_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}$

$$= e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)} - e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$$
$$= e^{\frac{1}{n}\ln(n(n+\frac{1}{n}))} - e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$$
$$= e^{\frac{1}{n}[\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})]} - e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$$
$$= e^{\frac{1}{n}\ln(n)}\, e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})} - e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$$

tend vers 1

$$= e^{\frac{1}{n}\ln(n)}\left[e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})} - 1\right]$$

or $e^X = 1 + X + o(X)$
$\ln(1+X) = X + o(X)$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})} = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})} - 1 = \cancel{1} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{1}$$

d'où $u_n = \underbrace{e^{\frac{1}{n}\ln(\ln n)}}_{0}\left[\frac{1}{n^2}\right]$

$u_n \sim \frac{1}{n^2} \rightarrow$ critère de Riemann.

11)

$\frac{1}{n^{\cos\frac{1}{n}}}$ or $0 \leqslant \cos\frac{1}{n} \leqslant 1$

$1 \leqslant n^{\cos\frac{1}{n}} \leqslant n$

$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^{\cos(\frac{1}{n})}} \leqslant 1$

or $\frac{1}{n}$ dvg

Or $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ implique :

si $\sum u_n$ dvg alors $\sum v_n$ dvg

si $\sum v_n$ cvg alors $\sum u_n$ cvg

donc $\frac{1}{n^{\cos\frac{1}{n}}}$ dvg

EDO <u>Feuille 4</u>

C) 1) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

On s'intéresse au polynome carac :

$P(X) = X^4 - 2X^2 + 1 = 0$

avec $Y = X^2$:

$P(Y) = Y^2 - 2Y + 1$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1$
$= 4 - 4$
$= 0$

$\frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$

$P(X) = (X^2 - 1)(X^2 - 1)$

Racines $(P) = \{-1 ; 1\}$ double

double

Racines réelles

λ est racine simple de P

$c_0 e^{\lambda t}$

λ est racine double de P

$c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$

λ est racine multiple de P :

$(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{m-1} t^{m-1}) e^{\lambda t}$

Sem 7 Analyse TD 4

$$y(t) = (C_0 + C_1 t)e^{-t} + (c_2 + c_3 t)e^{t}$$

2) $y^{(4)} + y = 0$

$P(X) : X^4 + 1 = 0$

$X^4 = -1$

$\sqrt[4]{-1} = e^{\frac{i\pi + k2\pi}{4}}$ avec $k \in [0, 3]$

$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}$

$z_1 = e^{i\frac{\pi + 2\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_2 = e^{\frac{i\pi + 4\pi}{4}} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

$z_3 = e^{\frac{i\pi + 6\pi}{4}} = e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Pour traiter des racines complexes :

$\lambda_1 = \underline{\alpha} + i\omega$

$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\omega$

$y(t) = e^{\alpha t}\cos(\omega t)$

$y(t) = e^{\alpha t}\sin(\omega t)$

On met X_1 sous forme cartésienne :

$$X_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$X_4 = \overline{X_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

on a donc :

$$C_0 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + C_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$
$$= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left[C_0\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + C_1\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right]$$

$$X_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$X_3 = \overline{X_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + C_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

$$= e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left[C_2\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + C_3\sin\left(\sqrt{\frac{2}{2}}t\right)\right]$$

La solution est donc

$$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left[C_0\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + C_1\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right]$$
$$+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left[C_2\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + C_3\sin\left(\sqrt{\frac{2}{2}}t\right)\right]$$