Entropie

L'entropie est la mesure de l'incertitude d'un vecteur de probabilité.

Vecteur de proba :

valeurs positives dont la somme vaut 1

Axiomes sur l'entropie :

Continuité :

si $(p_1^{(n)}, \dots, p_k^{(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} (p_1, \dots, p_k)$

alors $H(p_1^{(n)}, \dots, p_k^{(n)})$

$\xrightarrow[n \to \infty]{} H(p_1, \dots, p_k)$

Croissance :

$H(1) = 0$

$$H\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \dots \frac{1}{k+1}\right) > H\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots \frac{1}{k}\right)$$

Conditionnement :

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = p, \quad \sum_{i=1}^{k} q_i = q$$

et $p + q = 1$:

$$H(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots q_k)$$

$$= H(p, q) + p \cdot H\left(\frac{p_1}{p} \dots \frac{p_k}{p}\right)$$

$$+ q \cdot H\left(\frac{q_1}{q} \dots \frac{q_k}{q}\right)$$

d'où :

$$H\left(\frac{1}{n \times m} \dots \frac{1}{n \times m}\right) = H\left(\frac{1}{n} \dots \frac{1}{n}\right) + H\left(\frac{1}{m} \dots \frac{1}{m}\right)$$

Calcul de l'entropie

$$H(p_1 \dots p_m) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log(p_i)$$

avec les logs en base 2

$H(X, Y) =$

Entropie et Information

Entropie conditionnelle :

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$$

L'information mutuelle :

$$I(X,Y) = I(Y,X)$$
$$= H(X) + H(Y)$$
$$- H(X,Y)$$

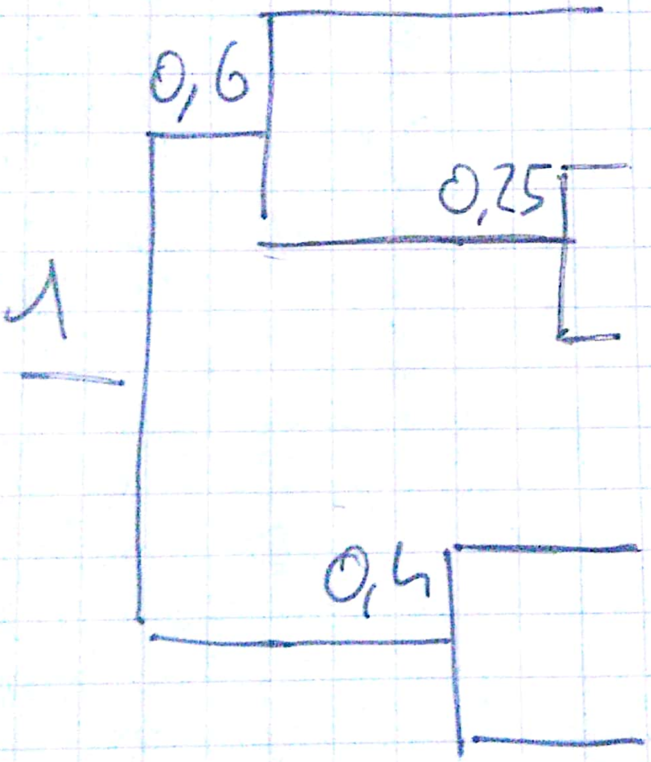
Si $I(X,Y) = 0$, alors X et Y sont indépendantes

Hoffmann

L'algorithme de Hoffmann permet l'obtention code uniquement déchiffrable de longueur moyenne minimale

On peut une convention pour faire corresp les montées/descentes aux 1/0.

Fusion des plus petits



p	cara	Code
0,35	α	00
0,1	β	010
0,15	γ	011
0,2	δ	10
0,2	ε	11

Montée : 0 Descente : 1

Canaux

Pour chaque type de canal on pose une matrice P qui modélise le traitement.

Canal Binaire Symétrique

→ On transmet soit fidèlement (proba $1-\epsilon$) soit on transforme en l'autre (ϵ)

$$P = \begin{pmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{pmatrix}$$

nb symboles entrée

nb symboles sortie

Canal binaire asymétrique

Asymétrie du modèle

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ q' & p' \end{pmatrix}$$

Canal d'effacement binaire

Un symbole est transmis
soit fidèlement (proba $1-\epsilon$)
soit illisible (proba ϵ)

$$P = \begin{pmatrix} 1-\epsilon & 0 & \epsilon \\ 0 & 1-\epsilon & \epsilon \end{pmatrix}$$

Capacité :

La capacité est le
pourcentage de bits mis

de manière fiable sur le canal.

Canal binaire symétrique :

$$C = C(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \log \varepsilon + (1-\varepsilon) \log (1-\varepsilon)$$

Canal binaire à effacement :

$$C(\varepsilon) = 1 - \varepsilon$$