UNIVERSITÉ
PARIS
DESCARTES

IUT

DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

DISCIPLINE : PROBA/STATS

Date de l'épreuve : 06/11/18

Année : 2 Groupe : 205

Écrire très lisiblement (en capitales)

NOM : LAPOSTOLET

Prénom : Arsène

NOTE DE 0 À 20	APPRÉCIATIONS
13,5	6 + 3 + 4,5 .

Ne rien écrire dans cette marge

PARTIE I

1)

1. a) $P(T > 5) = 0,5$ car T suit la loi Normale et $E(T) = 5$.

1. b) $P(3 \leq T \leq 5) = P(T \geq 3) - P(T \geq 5)$

$= P\left(\frac{T-5}{1} \geq \frac{3-5}{1}\right) - 0,5$

$= P(Z \geq -2) - 0,5$

avec $Z \sim N(0,1)$

2

$= P(Z \leq 2) - 0,5$

$= 0,9772 - 0,5$

$= 0,4772$

1/12

2)
On cherche x tel que :

$P(T > x) = 0,9$

$P\left(\frac{T-5}{1} > \frac{x-5}{1}\right) = 0,9$

$P\left(Z < -\frac{x-5}{1}\right) = 0,9$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\Leftrightarrow -\frac{x-5}{1} = 1,2$

$\Leftrightarrow x - 5 = -1,2$

$x = -1,2 + 5$

$x = 3,8$

Avec une probabilité de 90%, on est sûr que la station a besoin de plus de 3,8 minutes pour démarrer.

2

3) On cherche σ tel que

$P\left(\frac{T-5}{\sigma} < \frac{6-5}{\sigma}\right) = 0,98$

$P\left(Z < \frac{6-5}{\sigma}\right) = 0,98$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

2

$\Leftrightarrow \frac{6-5}{\sigma} = 2,06$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} = 2,06$

$\Leftrightarrow \sigma = \frac{1}{2,06}$

$\Leftrightarrow \sigma = 0,49$

PARTIE II

1)

1.a)

$P(T > 5) = e^{-5/5}$
$= e^{-1}$
$= 0,37$

1.b)

2 $P(T < 10) = 1 - P(T > 10)$
$= 1 - e^{-10/5}$
$= 1 - e^{-2}$
$= 1 - 0,14$
$= 0,86$

2) ~~On sait que $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ car T suit la loi exponentielle de paramètre λ. Donc :~~
~~$E(T) = \frac{1}{(1/5)} = 5$~~

0 Hors Sujet il est question de ... pas de la moyenne 3/4

Cette valeur n'est pas conforme aux hypothèses présentes en début d'exercice.

3)

3.a)

Soit les événements :

A : "La station n'a pas démarré au bout de 10 minutes"

B : "La station pas démarré au bout de 5 minutes".

On cherche $P_B(A)$: ~~qui~~

0.5

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \cancel{\frac{P(A) \times P(B) - P(A \cup}{P(B)}}$$

$$= \frac{P(T > 10) \times P(T > 5)}{P(T > 5)}$$

$$= \frac{e^{-10/5} \times 0{,}37}{0{,}37}$$

$$= \frac{0{,}14 \times 0{,}37}{0{,}37}$$

$$= 0{,}14$$

4/10

UNIVERSITÉ
PARIS
DESCARTES

IUT

DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

DISCIPLINE : PROBAS/STATS

Date de l'épreuve : 06/11/18

Année : 2 Groupe : 205

Écrire très lisiblement

NOM : LAROSTOCET

(en capitales)

Prénom : Anaïs

NOTE DE 0 À 20	APPRÉCIATIONS

Ne rien écrire dans cette marge

On remarque que les probabilités

5/12

4)

4.a)

ceci n'a pas sens - imaginez "0,37 ∩ 0,37" ça fait combien

$P(B>5) = P(\quad >5) \cap P(T>S)$

$$P(B>5) = P(T>5) \times P(T>5)$$
$$= 0,37 \times 0,37$$
$$= 0,1369$$

$$P(B<10) = P(T<10) \times P(T<10)$$
$$= 0,86 \times 0,86$$
$$= 0,7396$$

~~4.b) $P(A>t) = 2 \times P(T>t)$~~

~~On en déduit que A suit loi loi exponentielle~~

oui mais pourquoi ?

4.c) $P(B\leq t) = P(T\leq T)^2$

$\cancel{\times}\ [1-P(T\leq T)]^2$

$=$

NON ! $P(T\leq t) = 1 - P(T\geq t)$

6

PARTIE III

1)

1.a) On a :

$$Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$$ avec X_i variables de Bernoulli i.i.d.

On peut donc dire que Y suit la loi binomiale.

Quelles valeurs pour les paramètres ?

1.b)

$$P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10)$$

$$= \binom{10}{9} \times 0{,}8^9 \times (1-0{,}8)^{10-9}$$

$$+ \binom{10}{10} \times 0{,}8^{10} \times (1-0{,}8)^{10-10}$$

$$= 10 \times 0{,}11 \times 0{,}2$$
$$+ 1 \times 0{,}09 \times 1$$

$$= 0{,}22 + 0{,}09$$
$$= 0{,}31$$

erreur de calcul ?

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

IUT

DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

DISCIPLINE : PROBAS/STATS

Date de l'épreuve : 06/11/18

Année : 2 Groupe : 205

Écrire très lisiblement

NOM (en capitales) : LAPOSTOLET

Prénom : Arsène

NOTE DE 0 À 20	APPRÉCIATIONS

Ne rien écrire dans cette marge

2)

2.a)

$Z = \sum_{i=1}^{100} X_i$ avec X_i variables de Bernouilli i.i.d

On peut donc dire que Z suit la loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,8$:

$$Z \sim B(100, 0,8).$$

On observe que $n > 30$. D'après le TCL, on peut donc approcher Z par la loi normale :

$$Z \sim N(np ; np(1-p))$$

$$Z \sim N(100 \times 0,8 ; 100 \times 0,8(1-0,8))$$

1 $$Z \sim N(80 ; 16)$$

2h12

Scanned by CamScanner

2.b) On défini l'intervalle de ~~confiance~~ fluctuation
I tel que :

$I = [80 - a ; 80 + a]$

$\cancel{a = Q_{\alpha/2} \times \sigma}$ ce n'est pas la bonne formule

tel que $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$
et $Q_{\alpha/2}$ tel que :

$P(X \leq Q_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ avec $X \sim N(0,1)$
$P(X \leq Q_{\alpha/2}) = 1 - 0,05/2$
$P(X \leq Q_{\alpha/2}) = 1 - 0,025$
$P(X \leq Q_{\alpha/2}) = 0,975$
$Q_{\alpha/2} = 2,81$

donc $a = 2,81 \times 4$
$= 11,24$

donc on a $I = [80 - 11,24 ; 8 + 11,24]$

inutile de retenir des formules par cœur, il vaut mieux savoir les retrouver.

2. c) Si $p = 0,02$, la variable Z suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$:

$$Z \sim \mathcal{B}(100 ; 0,02)$$

Or on observe que n est grand et p est petit, en effet, $np = 2$ donc $np \leq 5$.
On peut donc approcher Z par une loi de Poisson de paramètres $\lambda = np$:

$$Z \sim \mathcal{P}oi(np)$$
$$Z \sim \mathcal{P}oi(2)$$

On cherche b tel que :

$$P(Z \leq b) = 0,95$$

On procède par tâtonnement :

$$P(X = 0) = e^{-2} \times \frac{2^0}{1}$$
$$= 0,\text{[illegible]}$$

$$P(Z = 1) = e^{-2} \times \frac{2^1}{1}$$
$$0,28$$

$$P(Z = 2) = e^{-2} \times \frac{2^2}{1 \times 2}$$
$$= 0,28$$

$$P(Z = 3) = e^{-2} \times \frac{2^3}{1 \times 2 \times 3} = 0,21$$

$P(Z=4) = e^{-2} \times \frac{2^4}{1\times2\times3\times4}$

$= 0,14 \times 0,66$

$= 0,09$

$P(Z=0)+P(Z=1)+P(Z=2)+P(Z=3) = 0,91$ } erreur

Or $P(X=4) = 0,09$

mais doit être B.

Donc on peut dire que 3 est une valeur approchée de p pour que la probabilité que 3 stations aient démarrée en 5 minutes soit de 95%.

2

mais d'où sort-il ?

3. a)

0

~~$E(X) = np \times 5 = 400$~~

~~$V(X) = np(1-p) \times 5 = 80$~~

0

~~3. b) $S = Z \times 5$ or Z suit la loi normale.~~
~~On peut donc dire que S suit également la loi normale car 5 est une constante.~~

~~$S \sim N(400 ; 80)$~~

12/12

IUT PARIS DESCARTES
DUT Info - S3

Proba-Stats - Module M3201
Année 2018-19

DST du 6 novembre 2018

durée 2h - sans document, avec calculatrice du département

Le sujet comporte trois parties indépendantes, chacune notée sur 7 points environ.
La table de loi normale est fournie avec le sujet.
Vous apporterez le plus grand soin à la rédaction et à la justification de vos réponses. Une réponse exacte sans justification pourra ne rapporter aucun point.

Rappel : Si A et B désignent deux événements et si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors la probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $\mathbb{P}_B(A)$, vaut $\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.
Valeurs numériques approchés : $e \approx 2.72$; $e^2 \approx 7.39$; $e^{-1} \approx 2.37$; $e^{-2} \approx 0.14$; $\ln(2) = 0.69$

Dans tout l'énoncé, on note T le temps (aléatoire) nécessaire au démarrage d'une station de travail choisie au hasard dans le parc informatique de l'IUT. Le temps T est exprimé en minutes (mn).

Partie I.
Dans cette partie, on suppose que T suit une loi normale de moyenne $5\,mn$ et d'écart-type $\sigma = 1\,mn$.

1) Quelle est la probabilité pour qu'une station de travail choisie au hasard
1.a) ait besoin de plus de 5 minutes pour démarrer ?
1.b) ait besoin de 3 à 5 minutes pour démarrer ?

2) Compléter la phrase : "Avec une probabilité de 90%, on est sûr que la station a besoin de plus de ... minutes pour démarrer".

3) Dans cette question, on ne suppose plus que $\sigma = 1\,mn$. Quelle devrait être la valeur de σ pour que, avec une probabilité de 98%, la station de travail démarre en moins de 6 minutes ?

Partie II.
Dans cette partie, on suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/5$, ce qui signifie que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}(X > t) = e^{-t/5}$.

1) Quelle est la probabilité pour qu'une station de travail choisie au hasard
1.a) ait besoin de plus de 5 minutes pour démarrer ?
1.b) démarre en moins de 10 minutes ?

2) On a constaté que le temps médian de démarrage des stations de l'IUT vaut 8 minutes. Cette valeur est-elle conforme aux hypothèses présentes en début d'exercice ?

3) Jules, étudiant à l'IUT, allume une station dans une salle informatique. Constatant que, au bout de 5 minutes, la station n'a pas démarré, il sort prendre un café.
3.a) Quelle est la probabilité qu'à son retour, $5\,mn$ plus tard, la station n'ait toujours pas démarré ?
3.b) Comparez les probabilités calculées aux questions 1a) et 3a) de la partie II. Commentez.

4) Bob et Alice sont étudiants à l'IUT. Ils entrent dans une salle informatique et choisissent deux stations que l'on suppose indépendantes. Ils les allument au même instant.
4.a) Quelle est la probabilité qu'aucune des deux stations n'ait démarré au bout de 5 minutes ? Que les deux stations aient démarré avant 10 minutes ?
On note A le temps nécessaire pour que l'une des deux stations démarre, et B le temps nécessaire pour que les deux aient démarré.
4.a) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, exprimer $\mathbb{P}(A > t)$ en fonction de t. En déduire la loi de A.
4.a) Idem pour $\mathbb{P}(B \leq t)$. Que peut-on en déduire quant à la loi de B ?

Partie III.
Dans cette partie, la loi de T n'est pas supposée connue. On sait seulement que p, la probabilité qu'une station démarre en moins de 5 minutes vaut 0.8.
On considère un réseau de n stations et on suppose que les temps nécessaires au démarrage de ces stations sont indépendants.

1) Dans cette question $n = 10$. On allume au même instant les 10 stations.
1.a) Cinq minutes plus tard, on relève le nombre Y de stations qui ont démarré. Quelle est la loi de Y ?
1.a) Avec quelle probabilité peut-on affirmer "Au moins 9 stations ont déjà démarré 5 minutes après l'allumage" ?

2) Dans cette question $n = 100$. On allume au même instant les 100 stations et on note Z le nombre de stations ayant démarré en moins de 5 minutes.
2.a) Quelle est la loi de Z ? Par quelle loi peut-on l'approcher ? (préciser les valeurs des paramètres définissant cette loi)
2.a) Calculer la valeur de a telle que, avec une probabilité de 95%, le nombre de stations ayant démarré en moins de 5 minutes est compris entre $80 - a$ et $80 + a$.
2.a) Pour cette question uniquement, on suppose que p, la probabilité qu'une station démarre en moins de 5 minutes, vaut maintenant 0.02. Qu'est-ce qui change pour la variable Z ? Calculer une valeur approchée de b telle que, avec une probabilité de 95%, le nombre de stations ayant démarré en moins de 5 minutes est inférieur ou égal à b.

3) Dans cette question, n vaut toujours 100 et p vaut toujours 0.8. Les stations sont montées "en série", ce qui signifie qu'elles sont rangées dans un certain ordre et que, lors de la mise sous tension, la première station démarre, puis la deuxième ne démarre que quand la première est en état de marche, la troisième ne s'allume que quand la deuxième est en état de marche, etc... On note S le temps nécessaire pour démarrer successivement les 100 postes.
3.a) Combien vaut l'espérance de S ? la variance de S ?
3.a) Quelle est la loi de S ? Combien vaut la médiane de S ?