IUT PARIS DESCARTES
DUT INFO - S3

2018-2019
Module M3201 - MATHS proba-stats

FICHE d'EXERCICES

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où X_i est de v. a. de Bernoulli idd de param

*Les exercices ou questions précédés du symbole * demandent un peu plus de réflexion ou de technicité que les autres mais sont à la portée de tous, essayez ! Les exercices ou questions précédés du symbole ⊞ sont à effectuer sous* Scilab.

Exercice 1 - Maintenance. Le Service Assistance Maintenance Utilisateurs ("SAMU") d'une entreprise a, entre autres, la charge de dépanner tous les collaborateurs de l'entreprise rencontrant un dysfonctionnement informatique. En cas de problème, il suffit de téléphoner à ce service et un informaticien se déplace auprès du collaborateur en difficulté si cela s'avère nécessaire. On compte 7 informaticiens travaillant au service "SAMU", la probabilité qu'un informaticien du service doive se déplacer auprès du collaborateur est $p = 0,40$ et le nombre d'appels téléphoniques reçus dans le service au cours d'une demi-journée est une v.a. notée X dont la loi de probabilité est définie par

k	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X = k)$	0,05	0,05	0,1	0,25	0,30	0,20	0,05

On suppose enfin que les causes de dysfonctionnement sont indépendantes et que lorsqu'un informaticien se déplace pour dépanner un utilisateur, il quitte le service pour toute la demi-journée.

Soit N la v.a. égale au nombre d'informaticiens du service "SAMU" qui doivent se déplacer auprès de collaborateurs en difficulté au cours d'une demi-journée.

a) Quelle est la loi de probabilité de la v.a. N lorsque $X = 4$?
b) Quelle est la loi de probabilité de la v.a. N lorsque $X = k$ $(1 \leq k \leq 7)$?
c) Donner en fonction de k l'expression de l'espérance de N lorsque le nombre d'appels téléphoniques est k $(1 \leq k \leq 7)$.
(*) **d)** Calculer l'espérance de X, l'espérance de N ainsi que le nombre moyen de d'informaticiens restant disponibles pour d'autres tâches.

Exercice 2 - QCM. Bob passe des tests de sélection pour une embauche. Les tests sont constitués uniquement de QCM pour lesquels deux réponses sont proposées à chaque question, l'une d'entre elles est juste, l'autre est fausse. Bob décide de répondre à chaque question en choisissant au hasard sa réponse, indépendamment d'une question à l'autre.

1) Le premier QCM comporte 10 questions. On note X le nombre (aléatoire) de bonnes réponses obtenues par Bob à ce QCM.
a- Déterminer avec précision la loi de la variable aléatoire X.
b- Quel est le nombre moyen de bonnes réponses que peut espérer Bob ?
c- Calculer la probabilité que Bob obtienne (*i*) 10 bonnes réponses ; (*ii*) strictement moins de 10 bonnes réponses ; (*iii*) au moins 8 bonnes réponses.
d- On note T le rang de la première bonne réponse obtenue par Bob, en convenant de noter "$T = 11$" s'il n'obtient aucune bonne réponse. Déterminer la loi de T.
2) Le deuxième QCM comporte 20 questions réparties en deux séries de 10 questions. Pour être autorisé à poursuivre la sélection, Bob doit obtenir au moins 8 bonnes réponses à chaque série.
a- Calculer la probabilité que Bob soit autorisé à poursuivre.
b- Calculer la probabilité que Bob obtienne au total exactement 18 bonnes réponses et soit autorisé à poursuivre.

$E(aX + bY) = a\,E(X) + b\,E(Y)$ $\qquad V(aX) = a^2 V(X)$

$E(X + a) = a + E(X)$ $\qquad V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

$V(X + a) = V(X)$ $\qquad$ (X et Y indépendants)

c- Sachant que Bob a obtenu au total exactement 18 bonnes réponses, quelle est la probabilité qu'il soit autorisé à poursuivre ?

Exercice 3 - Analyses médicales (extrait d'un DST). On propose une méthode économique pour analyser des échantillons sanguins afin de détecter une certaine maladie. Pour cela, on fait subir à chaque individu de la population sous surveillance un prélèvement qui est analysé de la façon suivante :

- sur chaque prélèvement individuel, on retire une dose ;
- on regroupe les doses 10 par 10, ce qui constitue un lot ; chaque lot est analysé ;
- si le résultat du lot est négatif, c'est que la maladie n'est présente dans aucune des 10 doses ;
- si le résultat du lot est positif, c'est que la maladie est présente dans au moins l'une des doses ; on procède alors à l'analyse de chaque dose individuelle.

On prélève 120 échantillons chaque jour. On suppose que la proportion de malades dans la population est 2% et que les états des individus (malade ou pas) sont indépendants.

1) Pour un lot de 10 prélèvements donné, quelle est la probabilité que le résultat de l'analyse soit négatif ?

2) Soit X le nombre de lots positifs obtenus au cours d'une journée. Quelle est la loi de X ? Déterminer son espérance.

3) Soit Y le nombre total d'analyses à faire dans une journée. Exprimer Y en fonction de X, calculer l'espérance de Y ainsi que la probabilité que $Y > 120$.

4) Comparer la méthode d'analyse proposée et la méthode "naturelle" qui consiste à analyser séparément chaque prélèvement.

Exercice 4 - Guichet. Le nombre de personnes se présentant à un guichet administratif à une heure donnée est aléatoire et distribué suivant une loi de Poisson de paramètre λ (λ est une constante > 0).

a) Etant établi que la probabilité que personne ne se présente à cette heure est de 5%, déterminer la valeur de λ.

b) Quel est le nombre moyen de personnes se présentant ?

c) Combien faut-il prévoir de guichets si on veut une garantie de 95% que personne n'attende.

Exercice 5 - Virus et Poisson. Un virus informatique se présente sous deux formes : A et B, et se transmet de manières distinctes pour les deux formes, si bien que l'on peut supposer que le nombre de postes infestés par la forme A est indépendant du nombre de postes infestés par la forme B. Un poste ne peut pas être atteint simultanément par les 2 formes de virus. On note X et Y les nombres (aléatoires) de postes infestés par A et B respectivement, et on suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs α et β.

1) Quel est le nombre moyen de postes infectés par la forme A du virus ? par la forme B ? par l'une des 2 formes ?

2) Que représente $X + Y$? Quelle est la valeur moyenne de $X + Y$? Quelle est la probabilité que $X + Y$ vaille 0 ?

3)* Montrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha + \beta$.

4) ⊞ Effectuer des simulations pour "vérifier" le résultat de la question 3).

Exercice 6 - Loi normale centrée réduite N(0, 1). On admet le résultat suivant.
Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $N(0, 1)$, alors pour tout x réel, la quantité $\mathbb{P}(X \leq x)$ est égale à une aire donnée par la formule

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ , \ \text{avec} \ \ f(t) = (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-t^2/2} .$$

La table de la loi $N(0,1)$ fournit pour quelques valeurs de x entre 0 et 3.49 la quantité $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

a) Représenter l'allure du graphe de la fonction f (parité, valeur en 0, limites à l'infini, etc).

b) Combien vaut la limite en $+\infty$ de F ? En déduire une justification de la valeur $F(0) = 0.5$ fournie dans la table. Que dire de $F(x)$ pour $x > 3.49$?

c) En vous aidant du graphe de f et de la table de la loi $N(0,1)$, compléter les formules suivantes pour X qui suit une loi $N(0,1)$.

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \ \ldots \ ; \ \mathbb{P}(X > 1) = \ \ldots \ ; \ \mathbb{P}(X \geq 1) = \ \ldots$$
$$\mathbb{P}(X \leq -1) = \ \ldots \ ; \ \mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1) = \ \ldots \ ; \ \mathbb{P}(X \leq 5) = \ \ldots$$
$$\mathbb{P}(X \leq \ \ldots) = 5\% \ ; \ \mathbb{P}(X \geq \ \ldots) = 1\% \ ; \ \mathbb{P}(X \geq \ \ldots) = 95\%$$
$$\mathbb{P}(-\alpha \leq X \leq +\alpha) = 90\% \text{ si } \alpha = \ \ldots \ ; \text{ idem pour } 90\%$$

Exercice 7 - Loi normale et bébés. On rappelle les définitions suivantes.
Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$. Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(m,\sigma^2)$ si $\dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $N(0,1)$. Dans ce cas, l'espérance de X vaut $\mathbb{E}(X) = m$ et la variance de X vaut $Var(X) = \sigma^2$. De plus, on appelle "variable centrée réduite associée à X" la variable aléatoire $\widetilde{X} = \dfrac{X-m}{\sigma}$.

On suppose que le poids à la naissance, en grammes, d'un nouveau-né suit une loi normale $N(m,\sigma^2)$ avec $m = 3200\ g$ et $\sigma = 400\ g$. En utilisant la table de loi $N(0,1)$, calculer la probabilité pour qu'un nouveau-né pèse

a) plus de $4\ kg$; **b)** moins de $3\ kg$; **c)** entre 2,8 et 3,6 kg.

Exercice 8 - Ordures ménagères. Une agglomération mène une enquête sur la collecte des ordures ménagères. Les ordures sont collectées chaque jour. On note X le poids en tonnes de déchets collectés chaque jour et on suppose que X est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne $m = 330$ tonnes et d'écart-type $\sigma = 130$ tonnes.

a) Quelle est la probabilité que X dépasse 330 tonnes ?

b) Montrer que la collecte dépasse 495 tonnes pour 10% des jours.

c) Quelle capacité de traitement M faut-il prévoir pour que les déchets collectés un jour puissent être tous traités le jour même avec une probabilité de 80 % (en supposant qu'on ne traite pas d'autres ordures ce jour-là) ?

d) On appelle *jours exceptionnels* les jours (lundi ou jours courants) où la collecte dépasse 600 tonnes. Calculer la probabilité qu'un jour courant soit exceptionnel ainsi que la probabilité qu'un lundi soit exceptionnel (prendre garde d'interpréter correctement ces phrases en termes probabilistes). En déduire la proportion de jours exceptionnels parmi les jours de semaine.

Exercice 9 - RTT. On modélise la durée hebdomadaire de travail des cadres par une variable aléatoire de loi normale $N(m,\sigma^2)$ avec $m = 45h$.

a) Quelle est la proportion de cadres qui travaillent plus de $45h$ par semaine ?

b) Une étude a montré que 1% des cadres travaillent plus de $60h$ par semaine. En déduire la valeur de σ.

c) Compléter les affirmations suivantes :
- 5% des cadres travaillent moins de ...h par semaine ;
- 95% des cadres travaillent entre ...h et ...h par semaine (*plusieurs réponses possibles*).

Exercice 10 - Cliché... Un chef de service quitte son domicile à 8h45 et se rend, en voiture de sport, à son bureau qui ouvre à 9h. La durée du trajet est une variable $N(m,\sigma^2)$ avec $m = 12$

mn et $\sigma = 3$ mn. La secrétaire du service se rend elle aussi au bureau : elle prend le train à 7h45, puis marche 10mn pour prendre un autobus à 8h40 qui la dépose devant son bureau. Les durées des trajets en train et en autobus sont des variables normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ avec $m_1 = 42$ mn, $m_2 = 15$ mn, $\sigma_1 = 3$ mn, et $\sigma_2 = 4$ mn. Quelle est la probabilité

a) que le chef de service soit à l'heure ?

b) que la secrétaire soit en retard ?

c) que le chef de service soit à l'heure et la secrétaire en retard ?

Exercice 11 - Chaîne de montage. Dans une usine de production automobile, on monte sur deux chaînes séparées les caisses de voitures et les moteurs correspondants. On suppose que le montage d'une caisse commence à 6 heures et nécessite un temps aléatoire X (exprimé en minutes) distribué suivant une loi normale $\mathcal{N}(60; 3^2)$. Le montage du moteur correspondant se fait sur une autre chaîne et nécessite un temps aléatoire Y (exprimé aussi en minutes) de loi $\mathcal{N}(180; 4^2)$.

1) Avec quelle probabilité la caisse sera-t-elle terminée avant 6h55 ?

2) A quelle heure H doit-on commencer le montage du moteur si on veut qu'il soit terminé en moyenne au même instant que la caisse ?

Dans la suite, on supposera que le montage du moteur commence effectivement à l'heure H. On utilisera aussi le théorème suivant : "Si Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires indépendantes et de lois normales, et si a et b sont des nombres réels, alors $aZ_1 + bZ_2$ suit encore une loi normale".

3) Combien valent l'espérance et la variance de $Y - X$? Quelle est la loi de $Y - X$?

4) Quelle est la probabilité que la caisse soit prête avant le moteur ? que la caisse et le moteur soit prêts en même temps ?

5) Les deux chaînes se rejoignent en une troisième qui doit terminer l'assemblage. Cet assemblage ne peut se faire que si la caisse et le moteur se présentent à des instants distants de moins de 5 minutes. Avec quelle probabilité l'assemblage aura-t-il lieu ?

6) Quel écart maximum faudrait-il tolérer entre les instants d'arrivée des deux parties sur la troisième chaîne pour que l'assemblage puisse être réalisé dans 90% des cas ?

Exercice 12 - Voyages, voyages... (extrait d'un DST). La durée prévue pour le trajet Paris-Orléans en train est $d = 60$ minutes. Dans les faits, cette durée, exprimée en minutes, est une variable aléatoire D qui vaut d dans 90% des cas et vaut $d + |X|$ dans les autres cas, X étant une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma = 15$.

0) A partir de la table de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et en vous aidant éventuellement d'un schéma,

a- calculer $\mathbb{P}(X \leq 15)$ et $\mathbb{P}(X > 15)$

b-justifier que $\mathbb{P}(|X| > 15) = 0.32$; $\mathbb{P}(|X| > 30) = 0.05$; $\mathbb{P}(|X| > 45) = 0.003$

1) a- Quelle est la probabilité qu'un train, parti à l'heure de Paris, soit en retard à l'arrivée à Orléans ?

b- Pour un train en retard, quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 15 minutes ?

c- Etablir (en le justifiant) que la probabilité qu'un train, parti à l'heure de Paris, accuse à l'arrivée à Orléans un retard de plus de 15 minutes est égale à $p = 0.032$.

2) Si le retard est supérieur à 15 minutes, la SNCF rembourse à chaque passager une somme forfaitaire de 10 euros. On note Y le montant du remboursement à prévoir pour chaque voyageur transporté.

a- Quelle est la loi de Y ? (justifier la réponse)

b- Calculer le coût moyen du remboursement que la SNCF doit prévoir pour chaque passager.

c- Quelle devrait être la valeur de σ pour que ce coût moyen soit divisé par 10 ?

3) Deux trains partent en même temps de Paris sur deux voies parallèles.

a- Quelle est la probabilité que le train le plus rapide effectue le parcours en 60 minutes ?

b- Quelle est la probabilité que le train le moins rapide arrive avec un retard de plus de 15 minutes ?

Exercice 13 - ⊞ Loi uniforme dans $[0,1]$. Dans cet exercice on appellera "nombre au hasard dans $[0,1]$" un nombre obtenu comme la réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme dans $[0,1]$. La fonction `rand` de `Scilab` répond à cette demande (*voir l'aide pour la syntaxe*).
a) Simulez une colonne de 10 nombres au hasard dans $[0,1]$ et tracez un histogramme de 10 intervalles représentant la répartition de ces 10 valeurs.
Recommencez avec 100 nombres, puis avec 1000. Que constatez-vous ?
b) Pour $n = 1$ jusqu'à $n = 1000$, calculez la moyenne des n premiers nombres obtenus à la question précédente, ainsi que leur variance.
Tracez en fonction de n, les moyennes et les variances obtenues. Que constatez-vous ? (*L'espérance, c'est-à-dire la moyenne théorique, d'une v.a. de loi uniforme dans* $[0,1]$ *vaut* $\frac{1}{2} = 0.5$ *et la variance théorique vaut* $\frac{1}{12} = 0.0833...$)
c) Simulez 1000 échantillons de taille 100 de nombres au hasard dans $[0,1]$ (*il est inutile et même déconseillé d'afficher le résultat !*).
Calculez la moyenne de chaque échantillon et tracez l'histogramme des moyennes ainsi calculées. Que constatez-vous ?

Exercice 14 - ⊞ Tests de générateurs aléatoires. Pour générer des nombres aléatoires, qu'ils soient entiers ou réels, `Scilab` dispose de fonctions prédéfinies qui produisent des lois précises. Voici quelques exemples que vous trouverez, ainsi que d'autres, dans la rubrique `grand` (prononcez "g-rand") de l'aide.
- lois discrètes pour générer des nombres entiers : loi Binomiale, loi Uniforme dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, loi de Poisson,
- lois continues pour générer des nombres réels : loi Uniforme dans $[a, b]$, loi Normale, loi Exponentielle.

a) Choisir une loi discrète, et les paramètres nécessaires, parmi celles proposées ci-dessus et simuler un échantillon de taille 1000 de cette loi.
Calculer la moyenne de l'échantillon et comparer avec la moyenne attendue.
Tracer un histogramme de la répartition de l'échantillon.
b) Construire une fonction `testkhi2` qui permet d'effectuer un test d'ajustement. Cette fonction prendra comme variables d'entrée `(obs,theo,niv)` et fournira en variables de sortie `[dist,concl]`, où
- `obs,theo` désignent deux vecteurs lignes de même longueur contenant les effectifs observés et les effectifs théoriques dans un tableau d'effectifs,
- `niv` désigne le niveau du test à fixer entre 0 et 1,
- `dist` désigne la distance du khi-deux entre le tableau observé et le tableau théorique,
- `concl` désigne la conclusion du test d'ajustement sous la forme `rejet` ou `pas rejet`.

c) Utiliser la fonction de la question b) pour effectuer un test d'ajustement sur les données simulées à la question a).
d) Reprendre les questions a) et c) avec une loi uniforme dans $[0,1]$, puis avec une loi uniforme dans $[a, b]$ (à vous de choisir a et b), puis (*) avec une autre loi continue.

Exercice 15 - ⊞ Loi non-uniforme dans $\{1, \ldots, N\}$. Construire, en faisant appel à la fonction `rand`, une fonction que vous appelerez `nonunif` qui prend comme variable d'entrée un vecteur p de longueur N quelconque et fournit en sortie,
- soit la réponse "`p n'est pas une probabilité`" si la somme des coordonnées de p ne vaut pas 1,
- soit, si la somme des coordonnées de p vaut 1, un entier aléatoire entre 1 en N de telle sorte que la probabilité d'obtenir i soit égale à p_i lorsque $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$.

Exercice 16 - ⊞ Loi uniforme - encore !
1) Simuler un échantillon de taille 1000 de nombres au hasard de loi uniforme dans $[-1,1]$.
Calculer la moyenne de cet échantillon et tracer un histogramme constitué de 10 intervalles de même largeur.
2) En utilisant la fonction rand composée avec une fonction qui, par dilatation et translation, transforme l'intervalle $[0,1]$ en $[-1,1]$, simuler un échantillon de taille 1000 de nombres au hasard dans $[-1,1]$.
Calculer la moyenne et tracer un histogramme constitué de 10 intervalles de même largeur.
Cet échantillon a-t-il la même distribution que celui de la question a) ?
3) Simuler deux échantillons de taille 1000 de loi uniforme dans $[-1,1]$ (méthode au choix) et effectuer les moyennes terme à terme des 2 échantillons. On obtient ainsi un nouvel échantillon de taille 1000.
Entre quelles bornes se trouvent les valeurs de cet échantillon ? Quelle est sa valeur moyenne ? Tracer l'histogramme. Le comparer aux ceux des questions précédentes. Ce 3ème échantillon a-t-il la même distribution que les deux premiers ?

Exercice 17 - ⊞ Fluctuations. Choisir une loi parmi celles mentionnées dans l'exercice 14 et enregistrer dans la variable m la valeur de l'espérance et dans la variable s l'écart-type de cette loi (il s'agit de valeurs théoriques).
1) Pour $n = 10$ puis $n = 100$, simuler n réalisations de cette loi (désignées par $X_1, \dots, X_n$) et calculer la moyenne $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ de ces réalisations.
2) Recommencer $N = 1000$ fois la question 1) en stockant les N valeurs des moyennes $\bar{X}_n$.
3) Centrer et réduire ces 1000 valeurs en effectuant le calcul de $(\bar{X}_n - m)/(s/\sqrt{n})$.
4) Regrouper les 1000 valeurs de la question précédente en 10 classes centrées en 0 et de largeur 1, et tracer l'histogramme correspondant. Comparer avec les histogrammes des autres étudiants du groupe. Que constatez-vous ? (*effectuer les comparaisons pour les 2 valeurs proposées de n*). Décrire précisément quelle conséquence du TCL vient d'être illustrée.
5) On s'intéresse à la famille des lois binomiales de paramètre p. Pour chaque valeur de p allant de 0 à 1 avec un pas de 0.05, reprendre les questions 1) et 2) avec $n = 30$ et $N = 100$ et faire figurer sur un même graphique tous les points de coordonnées $(p, \bar{X}_n)$ (pour chaque valeur de p, il y a 100 points). A quoi ressemble le nuage de points ainsi obtenu ? Savez-vous expliquez pourquoi ?

Exercice 18 - ⊞ Une valeur approchée de π. On se propose de calculer une valeur approchée de π par une méthode probabiliste, appelée méthode de Monte-Carlo. Il s'agit en fait d'une illustration de la loi des grands nombres et du théorème central limite.
Méthode : On lance un grand nombre de points dans le carré $[-1,1] \times [-1,1]$ et on compte la proportion de points qui se trouvent à l'intérieur du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1. D'après la loi des grands nombres, cette proportion fournit une valeur approchée de la probabilité de "tomber" à l'intérieur du disque. On en déduit ainsi (cf question 1) ci-dessous) une valeur approchée de π, on dit une "estimation de π". De plus, le théorème central limite permet de prédire, en fonction du nombre de points lancés, avec une probabilité de 95% l'écart maximal entre la (vraie) valeur de π et la valeur approchée obtenue.
1) Tracer sur une feuille de brouillon "à main levée" le carré $[-1,1] \times [-1,1]$ et le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
Combien vaut l'aire du carré ? l'aire du disque ?
Quelle est la probabilité qu'un point lancé au hasard et de façon uniforme dans le carré "tombe" à l'intérieur du disque ?
Comment traduire qu'un point de coordonnées (x,y) est situé à l'intérieur du disque ?
2) Pour une valeur de n à fixer ($n > 35$), simuler le lancer de n points dans le carré (*il suffit de*

choisir séparément (indépendamment) les abscisses et les ordonnées au hasard dans $[-1, 1]$.
Représenter ces n points dans un graphique.
Calculer la proportion de points tombés à l'intérieur du disque et stocker l'estimation de π ainsi obtenue.
3) Renouveler l'estimation de la question précédente jusqu'à obtenir N estimations de π (prendre par exemple $N = 1000$), autrement dit N valeurs approchées.
En éliminant les estimations "trop grandes" et "trop petites", dans quel intervalle se situent 95% des estimations ?
4) En utilisant le TCL, calculer de façon théorique l'intervalle de fluctuation centré sur π dans lequel doivent se trouver 95% des estimations. Comparer à la question précédente.

Exercice 19 - (*) Appels. Une personne doit joindre 3 correspondants par téléphone. Elle a la même probabilité p de joindre chaque correspondant et on admet que les résultats de ses appels sont indépendants.
1) Soit X le nombre de correspondants qu'elle parvient à joindre lors d'une première série de 3 appels. Quelle est la loi de X ?
2) Après cette première série d'appels, $3 - X$ correspondants n'ont pu être joints. La personne cherche à les joindre dans une 2ème série de $3 - X$ appels : on note Y le nombre de correspondants alors joints et Z le nombre total de correspondants joints au cours de ces 2 séries.
a- Donner en fonction de p, x, y la valeur de $\mathbb{P}_{(X=x)}(Y = y)$ pour $0 \leq y \leq 3 - x$.
b- En déduire l'expression en fonction de p de $\mathbb{P}(Z = z)$ pour $0 \leq z \leq 3$.
c- Calculer l'espérance de Z.

Exercice 20 - Durée de vie. La durée de vie, exprimée en heures, d'un composant électronique définit une variable aléatoire continue V qui suit une loi exponentielle. On a constaté expérimentalement que 97.04% de ces composants fonctionnent encore au bout de 30 000 heures.
1) Montrer que cette constatation permet de fixer à 1.10^{-6} le paramètre de cette loi exponentielle.
2) Quelle est la probabilité qu'un composant fonctionne encore au bout de 60 000 heures ? qu'il tombe en panne avant sa 10 000ème heure ?
3) On suppose dans cette question que 10 composants sont montés en série : le système ne fonctionne que si les 10 composants fonctionnent.
a- Calculer la probabilité que le système fonctionne encore au bout de 10^6 heures.
b- Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire égale à la durée de vie du système ; en déduire sa loi.
c- Compléter la phrase : "Le système dure en moyenne ... fois ... (moins/plus) longtemps que chaque composant pris indépendamment".
4)* On suppose maintenant que le système est constitué de 2 composants montés en redondance : le système fonctionne tant que l'un au moins des composants fonctionne. Reprendre la question b- ci-dessus, et calculer la 1/2 vie du système, c'est-à-dire la médiane de la durée de vie du système.

Exercice 21 - Autobus. On modélise le temps écoulé entre les instants de passage de deux autobus d'une même ligne à un arrêt donné par une variable aléatoire X. Ce temps est mesuré en minutes et on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0, 1$.
1) Quel est le temps moyen entre les instants de passage de deux bus ?
2) Alice arrive à l'arrêt juste après le passage d'un bus. Calculer la probabilité pour qu'elle attende plus de 10 minutes le bus suivant.
3) Bob arrive 5 minutes après Alice à l'arrêt. Calculer la probabilité pour que Alice soit toujours là et qu'ils attendent ensemble moins de 5 minutes le prochain bus.
4) Bob arrive 5 minutes après Alice à l'arrêt et Alice est toujours là. Quelle est alors la probabilité

qu'ils attendent ensemble plus de 10 minutes ?

Exercice 22 - ⊞ Ordi sous garantie. Soit X la v.a. égale à l'âge d'un ordinateur portable sous garantie qui arrive au service après-vente d'un constructeur informatique. La garantie dure 1 an et on modélise X par une v.a. continue définie sur $[0, 1]$ dont la fonction de répartition est donnée par $x \in [0, 1] \mapsto F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 2x^2 - x^4$.
1) Tracer sur votre brouillon l'allure du graphe de la fonction F et montrer que la fonction réciproque de F est donnée par $y \in [0, 1] \mapsto F^{-1}(y) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - y}}$.
2) A partir de 1000 réalisations d'une loi uniforme dans $[0, 1]$, simuler l'âge de 1000 ordinateurs arrivant au service après-vente.
3) Pour $n = 10, 11, 12, \ldots, 1000$, calculer l'âge moyen $moy(n)$ et de l'âge médian $med(n)$ évalués sur les n premiers ordinateurs. En déduire une estimation de l'espérance et de la médiane de X.
4)* Calculer les valeurs (théoriques) de l'espérance et de la médiane de X et comparer avec les résultats de la question 3) (*Indic. :* $\mathbb{E}(X) = 8/15 \approx 0.53$ *et* $Med(X) = \sqrt{1 - 1/\sqrt{2}} \approx 0.54$).

Exercice 23 - Salaires. On modélise le salaire horaire (d'un salarié pris au hasard) par une variable aléatoire X de densité $f(t) = Ct^{-a}$ pour $t \geq t_0$; $= 0$ pour $t < t_0$ où C, a et t_0 sont des constantes réelles telles que $C > 0, a > 1, t_0 > 0$. Dans les applications numériques, on prendra $a = 3, 5$.
a) Que représente t_0 ? Calculer C en fonction de t_0 et de a.
b) Déterminer la fonction de répartition de X.
c) Quelle est la proportion de personnes qui gagnent moins de $2t_0$? plus de $10t_0$?
d) Calculer en fonction de t_0 la valeur de la médiane de X, du 1er décile de X.
e)* Le revenu après impôt d'un salarié pris au hasard est une variable aléatoire R égale à $\sqrt{X}$. Déterminer la loi de R (calculer d'abord la fonction de répartition de R, puis sa densité).

Exercice 24 - Loi de khi-deux. Soit n un entier non nul fixé. On dit qu'une variable aléatoire K_n suit une loi de **khi-deux à n degrés de liberté** si K_n prend ses valeurs dans tout $\mathbb{R}^+$ et si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la probabilité $\mathbb{P}(K_n \leq t)$ est égale à l'aire comprise entre 0 et t sous la courbe représentative de la fonction $f_n : x \mapsto f_n(x) = c_n\, x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$, autrement dit

$$\mathbb{P}(K_n \leq t) = \int_0^t c_n\, x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx\,,$$

où c_n est une constante > 0 dépendant de n telle que $c_n \int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx = 1$.
Il n'existe pas de primitive explicite de f_n qui permette de calculer facilement $\mathbb{P}(K_n \leq t)$. En pratique, pour disposer de valeurs numériques, on utilise donc une calculatrice ou une "table de khi-deux", c'est-à-dire un tableau qui stocke

$$\text{le réel } t \text{ tel que } \mathbb{P}(K_n > t) = \alpha$$

pour chaque valeur de n (à choisir sur les lignes) et pour quelques valeurs de α (à choisir sur les colonnes).
a) Pour $n = 2$, puis $n = 4$, puis $n = 10$, aidez-vous de votre calculatrice pour tracer l'allure du graphe de la fonction f_n (notez en particulier la valeur en 0, la limite en $+\infty$, l'abscisse du maximum). *On pourra admettre que pour tout* $n \geq 2$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = 2c_n\, x^{\frac{n}{2}-2}\, e^{-\frac{x}{2}}\, (n - 2 - x)$.
b) En utilisant la table fournie et en accompagnant chaque résultat d'un dessin sur lequel figurera l'aire considérée, compléter les formules suivantes.
b-1) si K_5 suit une loi de khi-deux à 5 degrés de liberté :

$\mathbb{P}(K_5 \geq \ldots) = 0{,}05$; $\mathbb{P}(K_5 \geq \ldots) = 1\%$; $\mathbb{P}(K_5 \geq \ldots) = 0{,}95$; $\mathbb{P}(K_5 \leq \ldots) = 5\%$
$\mathbb{P}(\ldots \leq K_5 \leq \ldots) = 90\%$ (plusieurs réponses possibles)

b-2) si K_{10} suit une loi de khi-deux à 10 degrés de liberté :

$$\mathbb{P}(K_{10} \geq 9.342) = \ \ldots \ ; \ \mathbb{P}(K_{10} \leq 9.342) = \ \ldots$$
$$\mathbb{P}(K_{10} \leq 5) = \ \ldots \ ; \ \mathbb{P}(4.865 \leq K_{10} \leq 9.342) = \ \ldots$$

Exercice 25 - Clés USB. Un fabriquant de clés USB sait qu'une proportion de 0,05 de sa production est défectueuse.

1) Il garantit à un client qui achète 10000 pièces de la rembourser si plus de m clés sont défectueuses. Comment le fabriquant doit-il choisir m pour n'avoir pas plus d'une "chance" sur cent d'avoir à rembourser son client ?

2) Le service des fraudes vient faire un contrôle, prélève 1000 clés et note S le nombre de clés défectueuses.

a) Donner un intervalle de la forme $[50 - a, 50 + a]$ dans lequel S prend ses valeurs avec une probabilité supérieure à 0,95.

b) Idem avec un intervalle de la forme $[0,x]$, puis $[y, \infty[$. Traduire les résultats par des phrases.

Exercice 26 - QCM, la suite. Un QCM comporte 50 questions. Deux réponses sont proposées pour chaque question, l'une d'entre elles est juste, l'autre est fausse. Notre étudiant, Bob, est toujours décidé à répondre en choisissant au hasard parmi les réponses proposées.

1) Sans faire d'approximation gaussienne, calculer la probabilité que Bob ait au moins 25 réponses justes (*commencer par calculer la probabilité pour qu'il ait exactement 25 réponses justes en utilisant l'approximation* $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$*, puis conclure par un argument de symétrie*).

2) Recalculer cette même probabilité en faisant une approximation gaussienne.

3) Compléter les phrases "Avec 95% de chance, Bob aura au moins ... réponses justes" et "Avec 5% de chance, Bob aura au moins ... réponses justes".

4) Le professeur hésite entre deux modes de notation. Le premier consiste à noter +1 les réponses justes, 0 les réponses fausses ; le second consiste à noter +1 les réponses justes, −1 les réponses fausses. Quelles notes moyennes Bob peut-il espérer avec l'un et l'autre mode.

Exercice 27 - Arrondis. Dans un supermarché, après avoir pesé une marchandise, la balance électronique délivre un ticket où le prix est arrondi au centime près.

1) Pour une pesée, on note X la variable aléatoire donnant, en centimes, la différence entre le prix indiqué sur l'étiquette et le prix exact. Expliquer pourquoi on peut modéliser la loi de X par une loi uniforme sur l'intervalle $[-0,5; +0,5]$. Calculer l'espérance et la variance de X.

2) Quelle est la perte moyenne du supermarché pour 10^4 unités pesées ? Quelle est la probabilité que le supermarché gagne plus de 20 centimes pour 10^4 unités ? perde plus de 50 euros pour 10^6 unités ?

3) ⊞ Effectuer des simulations de la loi uniforme sur $[-0,5; +0,5]$ pour corroborer les résultats de la question 2).

* A l'aide de ces simulations, donner la valeur critique de gain du supermarché au-delà de laquelle on peut soupçonner la balance d'être mal réglée au profit du supermarché, avec un risque d'erreur de 5%.

Exercice 28 - Surcharge. Un avion long courrier peut transporter 100 passagers et leurs bagages. L'avion pèse 120 tonnes sans passagers ni bagages, mais équipage compris et le plein de carburant effectué. Les consignes de sécurité interdisent au commandant de bord de décoller si le poids de l'appareil chargé dépasse 129 tonnes. Les 100 places ont été réservées. Le poids d'un voyageur est une v.a. X d'espérance 70 kg et d'écart-type 10 kg. Le poids des bagages d'un voyageur est une v.a. Y d'espérance 20 kg et d'écart-type 10 kg. Toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, leurs lois de probabilité sont inconnues.

1) Soit C la v.a. égale au poids de l'avion lorsque les 100 voyageurs et leurs bagages seront chargés.
a- Donner l'expression en kilos de C en fonction des différentes v.a. décrites dans l'énoncé.
b- Calculer l'espérance et la variance de C et donner la loi de C.
c- Quelle est la probabilité p que le commandant refuse d'embarquer une partie des bagages afin de respecter les consignes de sécurité ?
2) L'avion doit effectuer 800 vols dans des conditions identiques à celles décrites ci-dessus. On fait toutes les hypothèses d'indépendance nécessaires. Soit N le nombre de vols où le commandant refuse d'embarquer une partie des bagages afin de respecter les consignes de sécurité.
a- Quelle est la loi de probabilité de N ? quelle approximation peut-on en faire ?
b- Quelle est la probabilité qu'au moins une fois parmi les 800 vols, le commandant refuse d'embarquer une partie des bagages ?

Exercice 29 - Referendum. On considère un échantillon de 1000 personnes auprès desquelles on effectue un sondage avant un référendum : 450 répondent *oui*.
1) Quelle valeur proposer pour estimer p, probabilité qu'un électeur vote *oui* le jour du scrutin ?
2) Calculer un intervalle de confiance, centré sur cette estimation, pour le paramètre p avec une confiance de 0,95 puis 0,98.
3) Proposer un intervalle de la forme $[0; \dots]$ dans lequel se trouve p avec une confiance de 0,95.
4) Quelle confiance accordez-vous à l'affirmation : "le *non* va l'emporter" ?
5) Combien faut-il interroger de personnes pour obtenir une fourchette pour p de largeur $2 \times 0,01$?
6) ⊞ Donner le résultat d'un sondage effectué par simulation sur 1000 personnes répondant *oui* avec probabilité 1/2. A l'aide d'une boucle, répéter ce sondage jusqu'à obtenir moins de 470 réponses *oui*. Que constatez-vous ?

Exercice 30 - Mesures physiques. En poste à l'observatoire de Göttingen, l'astronome Carl-Friedrich Gauss décide de mesurer la distance séparant son lieu de travail d'une étoile lointaine. Connaissant fort bien le matériel dont il dispose et prenant en compte les aléas liés à chaque mesure (perturbations atmosphériques, etc...), il part du principe que chaque mesure M ne lui fournit qu'une valeur aléatoire d'espérance d (vraie valeur de cette distance, en années-lumière) et d'écart-type 2 années-lumière. Dans ces conditions, il décide de prendre un certains nombre de mesures *indépendantes* $M_1, M_2, \dots, M_n$, puis d'adopter leur moyenne $\bar{M_n} = \dfrac{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}{n}$ comme évaluation de cette distance.
Combien de mesures indépendantes notre astronome doit-il effectuer pour être raisonnablement sûr (sûr à 95%) de ne pas se tromper au-delà d'une demi-année lumière dans son évaluation ?

Exercice 31 - Date limite. La probabilité qu'un produit alimentaire en vente soit impropre à la consommation avant sa date limite de consommation est p. La valeur de p est inconnue ; on cherche à l'estimer. On dispose d'un lot de 5000 unités dans lequel on a trouvé 20 unités impropres à la consommation. On suppose l'état des produits indépendant entre eux.
a- Donner une estimation ponctuelle de p.
b- Donner une estimation de p par intervalle de confiance au niveau de confiance 0,90 puis 0,95.
c- Compléter la phrase suivante et exprimer la en langage courant : "Avec une confiance de 95%, p est inférieur à ..."

Exercice 32 - Caméras (extrait d'un DST). On considère un parc de 900 caméras de surveillance supposées indépendantes.
1) Un agent de sécurité est chargé de visionner les images transmises par ces caméras. Il dispose d'un seul écran et zappe d'une caméra à la suivante toutes les 10 secondes, sans interruption

et sans jamais revenir à une caméra déjà controlée. On suppose toutes les caméras en état de fonctionnement.

a) Combien de temps lui faut-il pour contrôler les 900 caméras ? (*donner la réponse en mn*).

En fait, la durée de visionnement, exprimée en secondes, de chaque caméra est une variable aléatoire de moyenne 10 secondes et d'écart-type 0,1 seconde. Les durées de visionnement des caméras sont indépendantes. On note T le temps nécessaire, exprimé en secondes, à l'agent pour contrôler les 900 caméras.

b) Déterminer une approximation pour la loi de T en précisant les paramètres (*justifier*).

c) Quelle est la valeur moyenne de T ?

d) Quelle est la probabilité que l'agent ait besoin de plus de 2h30 pour contrôler toutes les caméras ?

2) Chaque caméra fonctionne avec une probabilité de $p = 0,9$ et on note S le nombre de caméras en état de fonctionnement.

a) Déterminer la loi exacte de S, son espérance et sa variance.

b) Fournir, en justifiant votre réponse, une approximation pour la loi de S en précisant avec soin les paramètres.

c) Calculer (une valeur approchée de) la probabilité que S dépasse 800 ; que S soit inférieure à 400.

d) Compléter, en justifiant la réponse fournie, la phrase suivante : "Avec une probabilité de 95%, le nombre de caméras en état de fonctionnement est au moins égal à ... ."

3) Dans cette question, chaque caméra fonctionne toujours avec une probabilité p, mais on ne connaît pas a priori la valeur de p. On constate que 180 caméras sont hors-service.

a) Proposer une valeur approchée de p (*justifier*).

b) Fournir un intervalle centré sur la valeur 0,8 dans lequel se trouve p avec une confiance de 90%.

Maths

Exercice 1

a) N suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ $p = 0,4$

$N = \sum_{i=1}^{4} N_i$ où les N_i sont des v.a de Bernoulli iid et de paramètre $0,4$
(il se déplacent | il se déplace pas)

$\forall k \in [\![0,4]\!]$, $P(N=k) = \binom{4}{k} \times 0,4^k \times (1-0,4)^{4-k}$

b) N suit une loi binomiale de paramètre k et $p=0,4$ avec $1 \leq k \leq 7$

Loi binomiale :

$E(X) = n \times p$

$V(X) = n \times p(1-p)$

c) $E(N) = 0,4k$ avec $1 \leq k \leq 7$

d) $E(X) = 1\times0,05+2\times0,05+3\times0,1+4\times0,25+5\times0,3+6\times0,2+7\times0,05$

$= 4,5$ (en moyenne 4,5 appels / demi journée)

$E(N) = 4,5 \times 0,4$
$= 1,8$

$7-1,8 = 5,2$

Il y a donc en moyenne 5,2 informaticiens dispo

Exercice 2

1) a) X est comme la somme de 10 v.a de Bernoulli de param 0,5 donc on a une v.a. qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,5$

b) $E(X) = 10 \times 0,5 = 5$
le nb moyen de bonnes réponses est de 5.

c) 1. $P(X=10) = \binom{10}{10} p^k \times (1-p)^{n-k}$

$P(X=10) = 1 \times 0,5^{10} \times (1-0,5)^0$
$= 0,5^{10}$
$= 0,0009$

$\binom{n}{k}$ $\binom{n}{n-k}$

2. $P(X \leq 9) = 1 - P(X=10)$
$= 1 - (0,5)^{10}$
$= 0,9991$

p facteurs
$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-(p-1))}{p!}$

3. $P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$

$= \binom{10}{8} \times 0,5^8 \times 0,5^2 + \binom{10}{9} \times 0,5^9 \times 0,5 + 0,5^{10}$

$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2}$

$\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = \frac{10}{1}$

$\Rightarrow P(X \geq 8) = 45 \times 0,5^{10} + 10 \, 0,5^{10} + 0,5^{10}$
$= 0,055$

d) $P(T=11)=0,5^{10}$

$P(T=1)=0,5$

$P(T=2)=0,5^2$

$\forall k \, [\![1;10]\!], \; P(T=k)=0,5^k$

2) a) Soit Y la variable aléatoire donnant le Nb de bonne réponse selon le 2e QCM

$Y \sim \mathcal{B}(10;0,5)$, X et Y indépendants

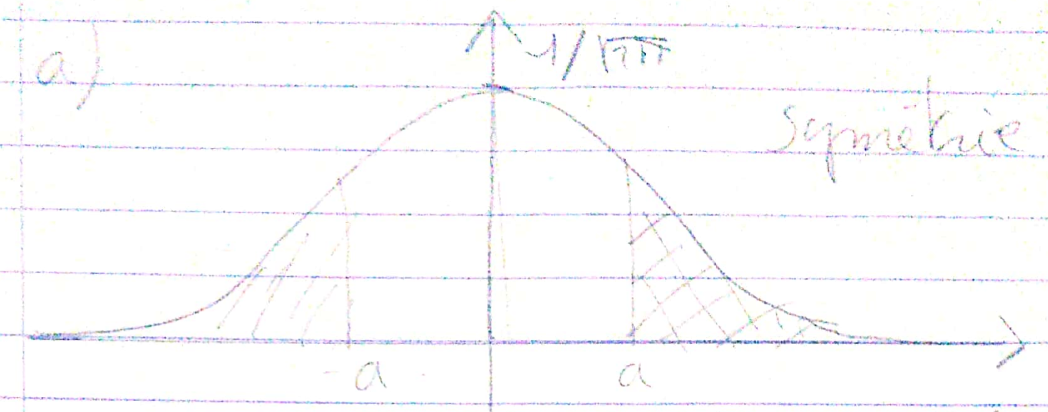
$$P(X \geq 8) \cap P(Y \geq 8) = P(X \geq 8) \times P(Y \geq 8)$$
$$= 0,055 \times 0,055$$

b) $P(X+Y=18) = P(X=8) \cap P(Y=10)$
$+ P(X=9) \cap P(Y=9)$
$+ P(X=10) \cap P(Y=8)$

$= P(X=8) \times P(Y=10)$
$+ P(X=9) \times P(Y=9)$
$+ P(X=10) \times P(Y=8)$
$=$

Exercice 6 :

a)



b)

$P(X \geq 0) = P(X \leq 0)$
$= \frac{1}{2}$

$P(X \geq a) = P(X \leq -a)$

$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$\leq$ $<$

C'est les mêmes car variable continue

$F(3,49) = P(X < 3,49)$ (table de loi Normale)
$= 0,99976$

c)

$P(X \leq 1) = 0,8413$

$P(X \geq 1) = 1 - 0,8413$
$= 0,1587$

$P(X > 1) = 0,1587$

$P(X \leq -1) = 1 - 0,8413$
$= 0,1587$

$P(-1 < X < 1) = P(X < 1) - P(X < -1)$
$= 0,8413 - 0,1587$
$= 0,6826$

$P(X < 5) \approx 1$
$P(X < -1{,}645) = 0{,}05$
$P(X > 2{,}32) = 0{,}01$
$P(X > 1{,}645) = 0{,}95$
$P(-a \leq X < a) = 0{,}90 \quad a =$

$2 \times P(X \leq \alpha) - 1 = 0{,}90$
$2P(X \leq \alpha) = 1{,}9$
$P(X \leq \alpha) = 0{,}95$
$\Rightarrow \alpha = 1{,}645$

Exercice 7

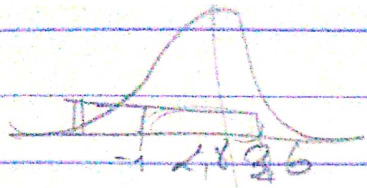
$X \sim N(\mu ; \sigma^2)$
alors $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0 ; 1)$

a) $P(X \geq 4\,kg) = P\left(\dfrac{X - 3200}{400} \geq \dfrac{4000 - 3200}{400}\right)$
$= P(Z \geq 2)$ où $Z \sim N(0,1)$

$= 1 - P(Z \leq 2)$
$= 1 - 0{,}9772$
$= 0{,}0228$

b) $P(X \leq 3\,kg) = P\left(\dfrac{X - 3200}{400} < \dfrac{3000 - 3200}{400}\right)$
$= P(Z < -\frac{1}{2})$ où $Z \sim N(0,1)$

$= 1 - P(Z > \frac{1}{2}) = 1 - 0{,}6915$
$= 0{,}3085$



$P(X \leq 3{,}6) - P(X \leq 2{,}8)$

c) $P(2{,}8 < x < 3{,}6) = P(X < 3{,}8) - P(X < 2{,}8)$

$= P\left(\frac{X - 3200}{400} < \frac{2800 - 3200}{200}\right)$

$= P\left(\frac{X - 3200}{200} < \frac{3600 - 3200}{200}\right)$

$= P(Z < -1) - P(\quad)$

$P(2{,}8 \leq X \leq 3{,}6)$

$= P\left(\frac{2{,}8 - 3{,}2}{0{,}4} \leq Z \leq \frac{3{,}6 - 3{,}2}{0{,}4}\right)$

$Z = \frac{X - m}{\sigma}$

$\rightarrow P(-1 \leq Z \leq 1) =$

$2P(Z \leq 1) - 1$

Exercice 8

a) $P(X \leq 330) = 1/2$
car $X \sim N(330, 130)$,

b) On centre et réduit :

$P(X > 495) = p\left(\frac{X-330}{130} > \frac{495-3[illegible]}{130}\right)$

$= p(Z > 1,27)$

$Z \sim N(0,1)$;

$= 1 - p(Z < 1,27)$

$= 1 - 0,8980$

$= 0,1047$

c) $P(X \leq M) = 0,8$

$P\left(\frac{X-330}{130} < \frac{m-330}{130}\right) = 0,8$

$P\left(Z < \frac{m-330}{130}\right) = 0,8$ avec $Z \sim N$

$\frac{m-330}{130} = 0,845$

$m = 439,85$

Exercice 9

a)

$P(X \geq 45) = 1/2$ car $X \sim N(45,$

b) Soit x la charge hebdo

On cherche σ tel que

$P(X \geq 60) = 0{,}01$

$P(X < 60) = 0{,}99$

$$P\left(\frac{X-45}{\sigma} < \frac{60-45}{\sigma}\right) = 0{,}99$$

$$P\left(Z < \frac{15}{\sigma}\right) = 0{,}99 \text{ avec } Z \sim N(0,$$

On trouve $\frac{15}{\sigma} = 2{,}33$

$\Leftrightarrow \sigma \simeq 6{,}45$

IUT PARIS DESCARTES
DUT INFO - S3

2018-2019
Module M3201 - MATHS proba-stats

Questions - Amphi du 18 septembre 2018

Question 1 - Que renvoie Scilab à l'instruction rand(1,10)? 10 nombre aléa entre 0 et 1 (Vecteur)
Et à l'instruction rand(10,10)?
Matrice (10,10) dans l'intervalle [0,1]

Question 2 - Que renvoie Scilab à l'instruction suivante ? n=1000; plot2d([1:n],rand(1,n))
Un graphique point attachés entre 0 et 1.

Question 3 - A quoi ressemble l'histogramme des données obtenues par l'instruction rand(1,n) ?
Les rectangles sont à la même hauteur (à peu près)

Question 4 - A quoi ressemblent les données obtenues dans z par la commande n=1000; y=rand(1,n); z=4*y-1 ? Histogramme avec la même tête mais sur [-1;3)
Avec les instructions : moy1=mean(y); moy2=mean(z), quelles valeurs renvoie Scilab pour moy1,moy2?
0,5 et 1 uniformément répartis

Question 5 - A quoi ressemblent les données obtenues dans y par la commande n=1000; x=rand(1,n); y=2*x ? Entre 0 et 2 mais pas uniformément
A quoi ressemblent les données obtenues dans z par la commande n=1000; x1=rand(1,n); x2=rand(1,n); z=x1+x2 ? Entre 0 et 2.
Après les instructions : moy1=mean(y); moy2=mean(z), quelles valeurs renvoie Scilab pour moy1,moy2 ? 1 pour les 2
A quoi ressemblent les données obtenues dans z par la commande suivante ?

n=1000; x1=rand(1,n); x2=rand(1,n); x3=rand(1,n); z=x1+x2+x3 [0,3] moyenne 1,5 pas unif

A quoi ressemblent les données obtenues dans S par la commande suivante?
Vecteur de valeur n=1000; A=rand(n,n); S=sum(A,'r')
non uniformément répartie centré sur 500

Question 6 - A quoi ressemblent les données obtenues dans x par la commande n=1000; x=rand(1,n,'normal') ?
Quel est l'allure de l'histogramme des données contenues dans x? (on pourra imaginer un histogramme à 10 classes)
Après les instructions : moy=mean(x); var=variance(x), quelles valeurs renvoie Scilab pour moy,var?
Comment simuler 1000 réalisations indépendantes de la loi $N(m, \sigma^2)$ avec $m = 30$ et $\sigma = 2$?
A quoi ressemble l'histogramme des données contenues dans y ?
Après les instructions : moy=mean(y); var=variance(y), quelles valeurs renvoie Scilab pour moy,var?

Question 7 - A quoi ressemblent les données obtenues dans y par la commande n=1000; x=rand(1,n); p=0.3; y=bool2s(x<p) ? 1000 variable de Bernoulli de param 0,3
A quoi ressemble l'histogramme des données contenues dans y ?
Quelle valeur approximative pour mean(y) ? 0,3
Après les instructions : n=20; x=rand(1,n); z=bool2s(x<0.5), observer z. Que pensez-vous de l'alternance entre les 0 et les 1? Ils semblent se regrouper
Comment simuler 1000 réalisations indépendantes d'une variable aléatoire prenant les valeurs -1,0,+1 avec probabilité 1/3 chacune ?

Question 8 - Que renvoie Scilab à la suite des commandes suivantes ?
n=1000; x=rand(1,n); g=1; while x(1,g)>0.3, g=g+1, end; disp(g)
Quelle est la loi exacte d'une telle variable aléatoire ?
Quelle est sa valeur moyenne ?

Question 9 - Quelles instructions Scilab pour simuler 1000 réalisations indépendantes d'une variable de loi binomiale $B(N, p)$ avec $N = 12$ et $p = 0.3$?
A quoi ressemble l'histogramme des données contenues dans z ?
Quelle est la valeur moyenne approximative de ces données ?

Question 10 - Comment générer des nombres pseudo aléatoires ? Autrement dit, comment fonctionne la fonction rand ? termes de la suite $x_{n+1} = (a x_n + c) \bmod m$
avec a, c, x_0 et m des entiers > 0 choisis. On divise
les termes par m

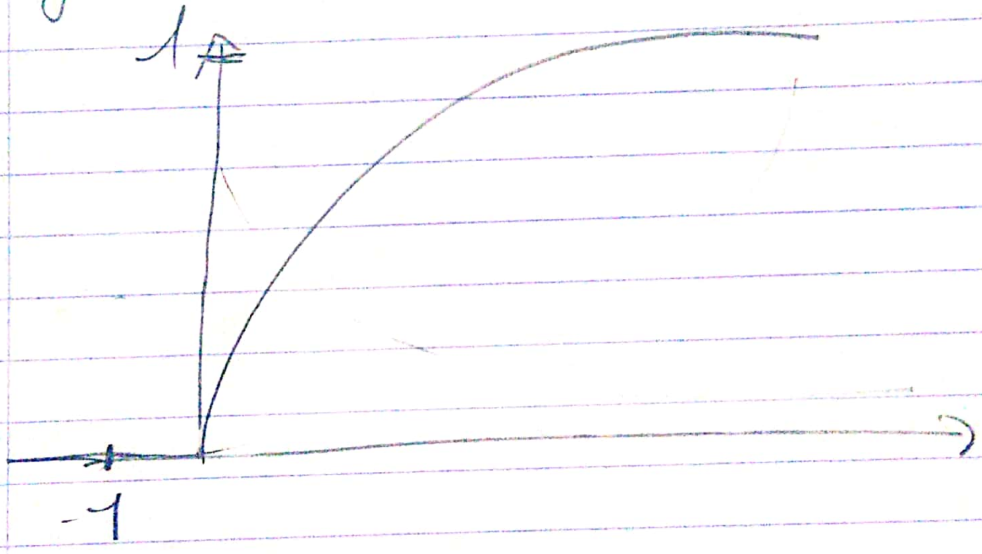
Loi exponentielle :

$P(X>0)=1$

$P(X>x)=e^{-\lambda x}$ si $x>0$

Fonction de Répartition

$f : x \longmapsto P(X \leqslant x)$



$E(X) = 1/\lambda$

$Var(X) = (1/\lambda)^2$

Exercice 21

1) Le temps moyen est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$= 1/0{,}1$

$= 10$

2) $P(X \geqslant 10) = 0{,}37$

3) $P(X>5)$ et $P(X<10)$

$= P(5<X<10) = P(X>5) - P(X>10)$

$= e^{-1\times 5} - e^{-0{,}4\times 10}$

$= 0{,}24$

Proba Condition

4) $\dfrac{P(X>5) \text{ et } P(X>15)}{P(X>5)}$

$= \dfrac{P(X>15)}{P(X>5)} = \dfrac{e^{-0{,}1\times 15}}{e^{-0{,}1\times 5}}$

Car l'un est inclus dans l'autre

$= e^{-\cancel{0{,}}1\times 10}$

$= e^{-1}$

$= 0{,}37$

Exercice 20

1) $P(V>30\,000) = 0{,}9704$

$0{,}9704 = e^{-\lambda\times 30\,000}$

$\ln(0{,}9704) = -\lambda\times 30000$

$\lambda = -\dfrac{\ln(0{,}9704)}{30\,000}$

$= 1\times 10^{-6}$

2) a) $P(V>60\,000) = e^{-1\times 10^{-6}\times 60000}$

b)

Q° supp:

Demi-vie d'une composant (temps au bout duquel un composant a une probabilité 1/2 d'être encore en vie).

$$P(V > \tau) = 1/2$$

$$e^{-\lambda\tau} = 1/2$$

$$\lambda\tau = -\ln(1/2)$$

$$\tau = -\frac{\ln(1/2)}{\lambda}$$

$$\tau = 0,7 \times 10^{6}$$

3) a) P(système fonctionne encore au bout de 10^6 heure) $= P(S > 10^6)$

$= P(V > 10^6)^{10}$

$= (e^{-\lambda \times 10^6})^{10}$

$= (e^{-1})^{10}$

$= e^{-10}$

b) $P(S > x) = (e^{-\lambda \times x})^{10}$

$= e^{-10\lambda x}$

c'est une loi exponentielle de param $\lambda = 10 \times 10^{-6}$

c) [...] en moyenne 10 fois moins [...]

$\frac{1}{\lambda}$ E(V) vs $\frac{1}{10\lambda}$ E(V)

Exercice 11

1)

$P(X < 55) = P\left(\frac{X-60}{3} < \frac{55-60}{3}\right)$

$= P\left(Z < -\frac{5}{3}\right)$

avec $Z \sim N(0,1)$

$= P\left(Z > \frac{5}{3}\right)$

$= 1 - P\left(Z < \frac{5}{3}\right)$

$= 1 - 0,9515$

$= 0,0485$

2) On met en moyenne 60 m pour monter la caisse et 180 m pour monter le moteur. Donc il faut commencer le moteur 2h avant pour qu'il soit fini en moyenne en même temps
→ 4h

3) $E(Y-X) = E(Y) - E(X)$ et $V(Y-X) =$

$= 180 - 60$

$= 120$

Y − X suit une loi normale
$N(120, 4^2+3^2) \Leftrightarrow N(120, 5^2)$

$P(Y-X \geq 120) = P\left(\frac{Y-X-120}{5} \geq \frac{0}{5}\right)$

$= P(U \geq 0)$

avec $U \sim N(0,1)$

$= P(U \geq 0)$

$= 1/2$

$P(Y-X=0)=0$

5) $P(115 \leq Y-X \leq 125)$

$= P(Y-X \leq 125) - P(115 \leq Y-X)$

$= P\left(U \leq \frac{125-120}{5}\right)$

$- P\left(U \leq \frac{115-120}{5}\right)$

$= 2P(U \leq 1) - 1$

$= 0{,}6816$

6) On cherche a tq :

$P(120-a \leq Y-X \leq 120+a) = 0{,}9$

$P\left(\frac{-a}{5} \leq U \leq \frac{a}{5}\right) = 0{,}9$

Scanned by CamScanner

Jeudi 4 | Probabilité | 2 TD

$\Leftrightarrow 2P\left(U \leq \frac{a}{5}\right) - 1 = 0,9$

$P\left(U \leq a/5\right) = 0,95$

$a/5 = 1,64$

$a = 1,64 \times 5$

$a \simeq 8,2$

Loi de poisson

pour tout $k \in \mathbb{N}$ $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda}{k!}$

$B(n,p)$ avec N 'grand'

$\begin{cases} \to \approx \text{Normal} \\ p \text{ petit} \to \approx \text{Poisson}(np) \end{cases}$

Preuve

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k}$

$= \frac{(n-k+1) \times (n-k+2) \times \dots \times n}{k!}$

$\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$\approx \frac{n^k}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$\approx \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\downarrow\, e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\downarrow\, 1}$

Propriété

$$\mathcal{B}(n,p) \underset{\substack{n \text{ "grand"} \\ p \text{ "petit"}}}{\simeq} \mathcal{P}oi(np)$$

Si $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ alors $E(X) = n \times \frac{\lambda}{n}$

$= \lambda$

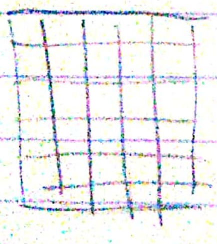
$Var(X) = n \frac{\lambda}{n}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$

$\longrightarrow \lambda$

Exemple

Un réservoir d'eau supposé de volume infini contient en moyenne 2 insectes par litre.
On note N la v.a. égale au nombre d'insectes dans un litre puisé au hasard dans le réservoir.
$E(N) = 2$

Quelle est la loi de N ?



n portions de 1 litre

$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si insecte dans portion } i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

↳ Bernoulli indép param $\frac{2}{n}$

N : nb insectes ds 1 litre $= \sum X_i$

donc $N \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{n}\right) \underset{n \text{ grand}}{\simeq} \mathcal{P}oi(2)$

Scanned by CamScanner

Nuit 6	Proba / Stat	2 cours

Exercice 4 : Guichet

X : nombre de personnes se présentant à un guichet administratif en une heure donnée

On suppose que $X \sim Poi(\lambda)$ où λ est une constante > 0 fixée

$P(X=0) = 0,05$

a) $0,05 = P(X=0) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^0}{0!}$

$$0,05 = e^{-\lambda}$$

$$\ln(0,05) = -\lambda$$

$$\lambda = -\ln(0,05)$$

$$\lambda \simeq 3$$

b) $E(X) = \lambda = 3$

c) $0,95 = P(\text{personne n'attend})$

$0,95 = P(\underbrace{X}_{\text{nb de personne présence}} \leq g)$ g : nb de guichet

$0,95 = P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=g)$

On cherche par tâtonnement en incrémentant

On conclut que $g = 6$ convient

Exercice 5

1) $E(X) = \alpha$
$E(Y) = \beta$

2) $X+Y$
Le nombre de postes infectés par A +
Le nombre de postes infectés par B
= nombre de postes malades

$\rightarrow E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \alpha + \beta$

$P(X+Y=0) = P(X=0) \cap P(Y=0)$
indépendants → produit
$= P(X=0) \times P(Y=0)$

$= e^{-\alpha} \times e^{-\beta}$
$= e^{-(\alpha+\beta)}$

3)

$P(X+Y=1) = P((X=0 \text{ et } Y=1) \text{ ou } (X=1 \text{ et } Y=0))$

$= P(X=0)P(Y=1) + P(X=1)P(Y=0)$
$= e^{-\alpha} \times e^{-\beta}\beta + e^{-\alpha}\alpha \times e^{-\beta}$
$= e^{-\alpha}e^{-\beta}(\beta+\alpha)$
$= e^{-(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)$

$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i \text{ et } Y=k-i)$

$= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)$

$= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \alpha^i \beta^{k-i}$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha^{i} \beta^{k-i}$$

$$= (\alpha + \beta)^{k}$$

Rappel TCL :

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad X_i$ iid

$E(X_i) = \mu \quad V(X_i) = \sigma^2$

$n \to +\infty \quad S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \overline{X}_n = N\left(\mu ; \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Exercice 28

1) a) $C = 120 \times 10^3 + 100\,(X+Y)$

b) $E(C) = E(120 \times 10^3 + 100\,(X+Y))$

$= 120 \times 10^3 + 100 \times E(X+Y)$
$= 120 \times 10^3 + 100\,(E(X) + E(Y))$
$= 120 \times 10^3 + 100\,(70 + 20)$
$= 129 \times 10^3$

$V(C) = V(120 \times 10^3 + 100\,(X+Y))$
$= V(100\,(X+Y))$
$= 100^2 \times (V(X) + V(Y))$
$= 100^2 \times (100 + 100)$
$= 100^2 \times 200$
$= 2\,000\,000$

$C \sim N(129 \times 10^3, 2\,000\,000)$
d'après TCL

c) $P(C > 129 \times 10^3)$

$P\left(\frac{C - 129 \times 10^3}{\sqrt{2\,000\,000}} > 0\right)$

$= P(Z > 0)$ Avec $Z \sim N(0,1)$

$= 1/2$

2)

a) C'est une loi binomiale :

$W = \sum_{i=1}^{800} W_i$ avec W_i variables de Bernoulli iid

$\Rightarrow W \sim \mathcal{B}(800, 0{,}5)$

D'après le TCL, on peut approcher par une loi normale car $n > 50$.

$Z \sim N(800 \times 0{,}5;\ 800 \times 0{,}5 \times 0{,}5)$

$\Leftrightarrow Z \sim N(400, 200)$

b) $P(Z \geq 1) = P\left(\frac{Z - 400}{200} \geq \frac{-399}{200}\right)$

$= P\left(V \geq -\frac{399}{22}\right)$ avec $V \sim N(0,1)$

$= P\left(V \leq \frac{399}{22}\right)$

$= 1$

Exercice 25

1) Soit $X = \sum_{i=1}^{10000} Y_i$ avec Y_i épreuves de Bernoulli iidd

donc X suit une loi binomiale

$$X \sim \mathcal{B}(10\,000, 0{,}05)$$

Étant donné $n = 10\,000$, d'après le TCL, on peut approximer X par :

$$Z \sim N(E(X), V(X))$$

or $E(X) = n \times p = 10\,000 \times 0{,}05$
$= 500$

et $V(X) = n \times p(1-p)$
$= 10\,000 \times 0{,}05(1-0{,}05)$
$= 475$

$$\Rightarrow Z \sim (500, 475)$$

$$P(X \geqslant m) = 0{,}01$$

$$P\left(\frac{X-500}{21{,}79} \geqslant \frac{m-500}{21{,}79}\right) = 0{,}01$$

$$P\left(Y \geqslant \frac{m-500}{21{,}79}\right) = 0{,}01$$

avec $Y \sim N(0,1)$

$$P\left(Y \leqslant \frac{m-500}{21{,}79}\right) = 0{,}99$$

$$\frac{m-500}{21{,}79} = 0{,}99$$

$n = 550,78$

donc il faut choisir $n = 551$

Jeu 7 Proba/Stat 1/16

Exercice 32

a) Il faut $900 \times 10 = 9000s$
$= 150$ mn

b) Soit X_i la variable aléatoire qui représente le temps pour la caméra i donc

$$T = \sum_{k=1}^{n=900} X_i \quad (X_i \text{ i.i.d tq } E(X_i) = 10,\ \sigma_i = 0{,}1)$$

Quand c'est une somme $N(n\mu, n\sigma^2)$
quand c'est une moyenne $N(\mu, \sigma^2/n)$

d'après le TCL, on peut approximer T par une loi normale :

$$N(10 \times 900,\ 900 \times (0{,}1)^2)$$
$$\Leftrightarrow N(9000\ ;\ 9)$$

c) $E(T) = 9000$

d) $P(T \geq 9000) = 1/2$

car $E(T) = 9000$ et T suit la loi normale

2/ a)

$$S = \sum_{i=1}^{900} Y_i \quad \text{avec } Y_i \text{ v.a de Bernoulli iid.}$$

Donc $S \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 900$ et $p = 0{,}9$

donc $E(S) = n \times p$
$= 810$

$V(X) = E(S) \times p$
$= 810 \times 0{,}1$
$= 81$

b) S suit la loi binomiale, or n est très grand (≥ 50) on peut donc approximer S par une loi Normale (TCL)

$N(810, 81)$

c) $P(S > 800) = P\left(\frac{S-810}{9} > \frac{800-810}{9}\right)$

$= P\left(Z > -\frac{10}{9}\right)$

avec $Z \sim N(0,1)$

$= P(Z < 1{,}11)$

$\simeq 0{,}8665$

$P(S < 400) = P\left(\frac{S-810}{9} < \frac{400-810}{9}\right)$

$= P\left(Z < -\frac{410}{9}\right)$

$= P(Z > 45{,}5)$

$= 1 - P(Z < 45{,}5)$

$= 1 - 1$

$= 0$

d) $P(S \geqslant x) = 0{,}95$

$P\left(\frac{S-810}{9} \geqslant \frac{x-810}{9}\right) = 0{,}95$

$1 - P\left(Z < \frac{x-810}{9}\right) = 0{,}95$

$P\left(Z < \frac{x-810}{9}\right) = 0{,}05$

$P(Z > \frac{x-810}{9}) = 0{,}05$

$1 - P(Z < -\frac{x-810}{9}) = 0{,}05$

$P(Z < -\frac{x-810}{9}) = 0{,}95$

$-\frac{x-810}{9} = 1{,}645$

$x - 810 = -9 \times 1{,}645$

$x = 810 - 9 \times 1{,}645$

$\boxed{x = 795\ €}$

3)

a) $p = \frac{900-180}{900}$

$p = 0{,}8$

b) $p \in [0{,}8 - \alpha ; 0{,}8 + \alpha]$ dans 90% des cas. $1 - \alpha = 0{,}9 \Leftrightarrow \alpha = 0{,}1$

$[p - \varepsilon_\alpha ; p + \varepsilon_\alpha]$

$\varepsilon_\alpha = u_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

avec $u_{\alpha/2}$ qui vérifie

$P(Z < u_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Scanned by CamScanner

Fonction de répartition de la loi $N(0,1)$

Cette table donne, pour quelques valeurs de x entre 0 et 3.49, $F(x) = P(X \leq x)$ dans le cas où X est une v.a. de loi $N(0,1)$.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998