IUT de Paris Descartes, Dpt INFO

DST de Probabilités et Statistique - S3 - Janv.2019

Durée : 2H - Sans Documents, calculatrice fournie

NOM-Prénom : LAPOSTOLET . . . Arsène . . . **Groupe** : 205

A. **Groupes sanguins et apparition d'une maladie :**
On cherche à savoir si la fréquence d'apparition d'une maladie est liée au groupe sanguin des individus considérés. Sur 200 malades observés, on a dénombré 104 personnes du groupe O, 76 du groupe A, 18 du groupe B et 2 du groupe AB.
On admet que dans la population générale, la répartition entre les groupes est la suivante : 47% d'individus dans le groupe O, 43% dans le groupe A, 7% dans le groupe B et 3% dans le groupe AB. Au risque standard de $\alpha = 5\%$, que peut-on en conclure ? *(On prendra soin d'introduire clairement une hypothèse H_0, puis de justifier son rejet ou encore l'impossibilité de la rejeter).*

B. Intervalles de confiance pour une proportion :

Dans un grand pays démocratique, à l'approche d'un referendum, un institut publie chaque dimanche la "cote" estimée du *'OUI'* à partir des résultats d'un sondage effectué sur un échantillon représentatif de $n = 1000$ personnes.

Les sondages des premier et deuxième dimanches de janvier ont donné respectivement des estimées ponctuelles de 48% et 46% pour cette cote du *'OUI'*.

1. Au niveau de confiance 95%, quels sont les intervalles de confiance I_1 et I_2 contenant les véritables cotes p_1 puis p_2 à ces deux dates ?

2. Peut-on raisonnablement affirmer que cette cote a chuté de deux points entre le premier et le deuxième dimanche de janvier ? ?

3. En basant ses calculs sur les résultats du deuxième sondage, à quel point est-on confiant quant à l'éventuelle victoire du 'NON' ?

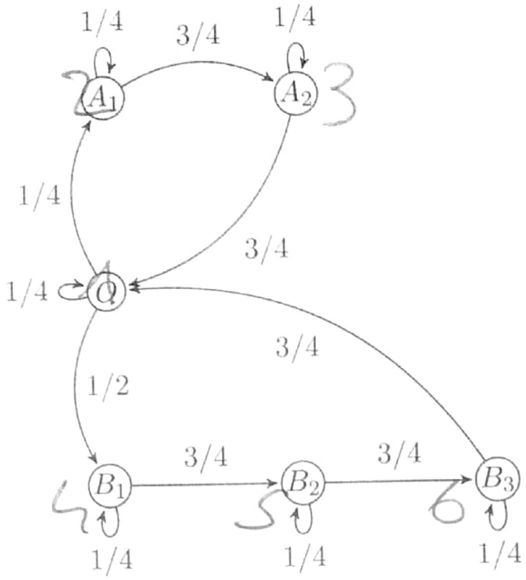
C. **Chaîne de Markov associée à des traitements de tâches :**

Deux types de tâches sont susceptibles d'être traitées par un serveur conformément au modèle ci-dessous, où

— l'état O correspond à un serveur "Oisif" (pas de tâche couramment traitée)

— A_1 et A_2 correspondent à la progression du traitement d'une tâche de type A

— B_1, B_2 et B_3 correspondent à la progression du traitement d'une tâche de type B



1. Pourquoi peut-on affirmer que la chaîne (X_n) représentée à travers le graphe de transition ci-dessus est *irréductible* ?

2. Cette chaîne irréductible est-elle *apériodique* ?

3. Qu'affirme le *Théorème de Döblin* au sujet d'une telle chaîne ?

4. En adoptant **impérativement** la numérotation ci-dessous

$$Etat\ N^o1 : O,\ N^o2 : A_1,\ N^o3 : A_2,\ N^o4 : B_1,\ N^o5 : B_2,\ N^o6 : B_3,$$

écrire la matrice de transition P associée à cette chaîne (X_n).

5. On donne à la chaîne un démarrage déterministe depuis l'état N^o1 (état O), en sorte que $\mathbb{P}\{X_0 = O\} = 1$. Quelle est donc la loi de cette chaîne après un pas ? Et après deux pas ?

6. Ecrire le système linéaire apparaissant naturellement au cours de la recherche d'une mesure invariante associée à la chaîne (X_n). Quelle est donc l'unique mesure invariante associée à cette chaîne ?

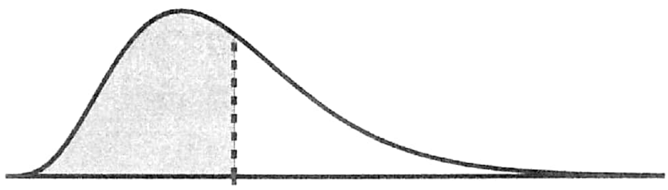
7. Au vu de ce qui précède, évaluer, dans la limite de temps long où $n \to +\infty$:

- la proportion de temps où le serveur est "Oisif"
- la proportion de temps où le serveur est occupé à traiter une tâche de type A
- la proportion de temps où le serveur est occupé à traiter une tâche de type B

8. Peut-on affirmer que l'unique mesure invariante de cette chaîne est *réversible* ?

Tableau C

Percentiles de la distribution du χ^2. Valeurs de χ^2_P correspondant à P

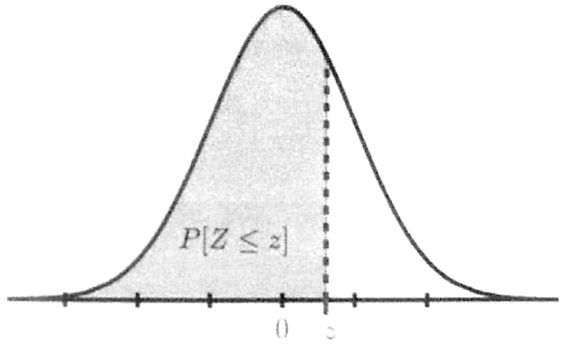


χ^2_p

dl	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	.0000	.0002	.0010	.0039	.0158	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.0100	.0201	.0506	.1026	.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	.0717	.1148	.2158	.3518	.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	.2070	.2971	.4844	.7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	.4117	.5543	.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.6757	.8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
45	24.31	25.90	28.37	30.61	33.35	57.51	61.66	65.41	69.96	73.17
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6
dl	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$

Table N

Aire sous la courbe normale à gauche de z, c'est à dire $P[Z \leq z]$, où $Z \sim N(0;1)$.



	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09

UNIVERSITÉ
**PARIS
DESCARTES**

IUT

DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

DISCIPLINE : Proba / Stats

Date de l'épreuve : 14/04/19

Année : 2 **Groupe** : 205

17,5/20

NOM : LAPOSTOLET
Écrire très lisiblement (en capitales)
Prénom : Arsène

NOTE DE 0 À 20	APPRÉCIATIONS

Ne rien écrire dans cette marge

A)

Soit Ho : "La répartition dans les groupes sanguin chez les malades est identique de celle de la population nationale"

On effectue donc un test de conformité du χ^2 à partir des valeurs suivantes :

Groupe	A	B	O	AB	
Effectif	76	18	104	2	200

6/6

On calcule la distance du χ^2 :

$$D = \frac{(76-(200\times 0,43))^2}{200\times 0,43}$$

$$+ \frac{(18 - 200\times 0,07)^2}{200\times 0,07}$$

1/

Scanned by CamScanner

$$+ \frac{(104 - 200 \times 0,47)^2}{200 \times 0,47}$$

$$+ \frac{(2 - 200 \times 0,03)^2}{200 \times 0,03}$$

$D =$ 6,03

On calcule maintenant le seuil du χ^2 avec un risque de 5%.
On a un degré de liberté d = Nb colonne -1
$= 4 - 1 = 3$
On a donc d'après la table

$\chi^2_5 = 7,815$

On a $\chi^2 > D$, donc au risque de 5% on doit accepter l'hypothèse Ho.

On peut donc affirmer au risque 5% que la maladie ~~n'~~ est pas liée au groupe sanguin

1)

Soit $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_i$ avec X_i va de Bernoulli i.i.d tq : "OUI" = 1
"NON" = 0

$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\, E(X_i)$

$= E(X_i) = p$

$Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=0}^{n} X_i\right)$

$= \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ X_i i.i.d

D'après le TCL,

$\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0;1)$

On cherche l'intervalle I_1 de la forme $I_1 = [p-\varepsilon ; p+\varepsilon]$ avec ε tq :

$P(p-\varepsilon \leq \bar{X}_n \leq p+\varepsilon) = 0,95$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 0,95$

3/

$\Leftrightarrow 2P\left(N \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) - 1 = 0,95$

$\Leftrightarrow P\left(N \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 0,975$

$\Leftrightarrow \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = 1,96$

$\varepsilon = 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

Pour I_1 on approxime p par $\hat{p} = 0,48$

$\varepsilon = 1,96\sqrt{\dfrac{0,48(1-0,48)}{1000}}$

$\varepsilon \simeq 0,0309$

Pour I_2 on approxime p par $\hat{p} = 0,46$

$\varepsilon = 1,96\sqrt{\dfrac{0,46(1-0,46)}{1000}}$

$\varepsilon \simeq 0,0308$

D'où :

$I_1 = [p - 0,309 ; p + 0,309] = ?$

$I_2 = [p - 0,308 ; p + 0,308] =$

11

UNIVERSITÉ
PARIS DESCARTES

IUT

DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

DISCIPLINE : Proba/Stats

Date de l'épreuve : 14/01/19

Année : 2 **Groupe** : 205

NOM (Écrire très lisiblement en capitales) : LAPOSTOLET

Prénom : Anzane

NOTE DE 0 À 20	APPRÉCIATIONS

Ne rien écrire dans cette marge

3/4

2) Étant donné que la variation de la popularité est de seulement 2%, ce qui est inclut dans l'intervalle calculé précédement, on ne peut affirmer que la cote de popularité a réellement baissé de deux points ; il pourrait en effet s'agir d'une fluctuation naturelle de l'échantillon. Pour en avoir le coeur net, il faudrait faire des sondages avec un échantillon plus large. 1

3) On cherche la probabilité de victoire du NON selon le second sondage :

$$P(p \leq \bar{X}_n + 0,04)$$

$$= P\left(\frac{-0,04}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

5/

Scanned by CamScanner

$= P\left(N \leq \dfrac{0,04}{\sqrt{\dfrac{0,464-0,461}{1000}}}\right)$

$= P\left(N \leq \cancel{16}\right)$ 0,1

$= 1$

D'après le 2° sondage on peut avoir une extrême confiance en la victoire du NON.

C.

1) Une chaîne de Markov est une chaîne qui ne possède aucun état transient, or étant donné que le graphe de représentation de la chaîne de $(\ldots)$ est fortement connexe, on peut dire que tous ses états sont récurrents, elle est par conséquent irréductible.

1

2) Une chaîne est dite apériodique lorsque ses états sont apériodiques. Or si deux états sont communiquants ils ont la même période.
X_n étant irréductible, si l'un de ses états est apériodique, elle est apériodique.
Or

$$Per(A_1) = PGCD(1, 3, 4 \dots) = 1$$

1

On peut donc dire que X_n est apériodique.

8,5/10

3) D'après le Théorème de Döblin, une chaîne irréductible et apériodique converge vers une mesure invariante, et ce, exponentiellement rapidement.

4) D'après le graphe de X_n on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

1

7/

5) Loi $(P\{X_0=0\}=1) = (1,0,0,0,0,0)$

Après 1 pas :

$\text{Loi}(X_1 / P\{X_0=0\}=1)$

$= \text{Loi}(P\{X_0=0\}=1) \times P$

$= (1/4, 1/4, 0, 1/2, 0, 0)$

Après 2 Pas :

$\text{Loi}(X_2 / P\{X_0=0\}=1)$

$= \text{Loi}(X_1 / P\{X_0=0\}=1) \times P$ 0

$= (1/8, 1/4, 3/8, 1/4, 3/8, 0)$

6) On cherche $\pi(\pi_0, \pi_1, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$

tq : $\pi \times P = \pi$ et $\sum_{i=0}^{5} \pi_i = 1$

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_5 \\ \pi_1 = \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 \\ \pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 \\ \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_3 \\ \pi_4 = \frac{3}{4}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_5 = \frac{3}{4}\pi_4 \end{cases}$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

IUT

DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

DISCIPLINE : Proba / Stats

Date de l'épreuve : 14/01/19

Année : 2 Groupe : 205

Écrire très lisiblement

NOM (en capitales) : LAPOSTOLET

Prénom : Arsène

NOTE DE 0 À 20	APPRÉCIATIONS

Ne rien écrire dans cette marge

$$\begin{cases} \pi_0 = 3\pi_1 \\ \pi_1 = \pi_1 \\ \pi_2 = \pi_1 \\ \pi_3 = 4\pi_1 \\ \pi_4 = 3\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_5 = \frac{3}{4} \times \frac{16}{4}\pi_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = 3\pi_1 \\ \pi_1 = \pi_1 \\ \pi_2 = \pi_1 \\ \pi_3 = 4\pi_1 \\ \pi_4 = 4\pi_1 \\ \pi_5 = \frac{3}{4} \times \frac{16}{4}\pi_1 = 12\pi_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3\pi_1 + \pi_1 + \pi_1 + 4\pi_1 + 4\pi_1 + 12\pi_1 = 1$

9/

$29\pi_1 = 1$

$\pi_1 = \frac{1}{25}$

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{3}{25} \\ \pi_1 = \frac{1}{25} \\ \pi_2 = \frac{1}{25} \\ \pi_3 = \frac{4}{25} \\ \pi_4 = \frac{4}{25} \\ \pi_5 = \frac{12}{25} \end{cases}$$

1(1)

On conclut que X_n a pour mesure invariante

$\pi\left(\frac{3}{25}, \frac{1}{25}, \frac{1}{25}, \frac{4}{25}, \frac{4}{25}, \frac{12}{25}\right)$

Scanned by CamScanner

6(7)

Étant donné que d'après le THM de Döblin, la mesure invariante est atteinte exponentiellement rapidement, on peut dire que quand $n \to +\infty$, la loi de X_n est π car X_n est irréductible et apériodique.

1

Ainsi,

le serveur est oisif $\frac{3}{25}$ du temps

(temps passé à l'état $0 = \pi_0 = \frac{3}{25}$

le serveur execute une tâche de type A $\frac{2}{29}$ du temps

(temps passé à l'état $A_1 + A_2 = \pi_1 + \pi_2 = \frac{1+1}{25} = \frac{2}{25}$

le serveur execute une tâche de type B $\frac{24}{29}$ du temps.

(temps passé à l'état $B_1 + B_2 + B_3$

$= \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{12}{25}$

1 $= \frac{20}{25}$

11/